# 782. Uniformly convex ナ Banach 空間ニ於ケル Mean Ergodic Theorem

角谷　靜夫（阪大）

近着ノ Bull. Amer. Math. Soc. 45-1 ニテ Garrett Birkhoff ガ uniformly convex ナ Banach 空間ニテ $\|T\| \leqq 1$ ナル任意ノ linear operator $T$ ニ對シテ Mean Ergodic Theorem ガ簡單ニ證明出來タト報ジテヰル。Birkhoff ノ證明ハ非常ニ簡單ナモノラシイケレドモ、ソノ證明ハドウ云フ方法ニヨツタモノカ全然ワカラナイ。コノ定理ノ比較的ニ簡單ナ證明ガ得ラレタカラ以下デ報告スル。

**定理**　假定　$E$ ガ uniformly convex ナ Banach 空間[1], $T$ ハ $\|T\| \leqq 1$ ナル bounded

脚註 次頁ヘ

linear operator.

<u>結論</u> 任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $x_n = \frac{1}{n}(T + T^2 + \cdots \cdots + T^n)x$ ハ $n \to \infty$ ナルトキ强收斂スル。

證明: $\|x_n\|$ ノ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ對スル下限ヲ $\alpha$ トセヨ。$\alpha = 0$ ナラバ定理ハ明カニ成立スル。何トナレバ $\alpha = 0$ ナラバ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\|x_n\| < \varepsilon$ ナル $n$ が存在スル。然ラバ任意ノ $N$ ニ對シテ $kn \leqq N < (k+1)n$ ナル integer $k$ ヲトレバ

$$x_N = \frac{1}{N}(T + T^2 + \cdots\cdots T^N)x$$

$$= \frac{1}{N}\left\{nx_n + nT^n x_n + \cdots\cdots + nT^{(k-1)n}x_n + (T^{kn+1} + \cdots \cdots + T^N)x\right\}$$

$$\|x_N\| \leqq \frac{1}{N}\left\{kn\|x_n\| + (N - kn)\|x\|\right\}$$

$$\leqq \|x_n\| + \frac{n}{N}\|x\| < \varepsilon + \frac{n}{N}\|x\|$$

ヨツテ

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \|x_N\| \leqq \varepsilon$$

---

(i) Banach 空間が uniformly convex デアルト云フノハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が定マリ、$\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|x - y\| \geqq \varepsilon$ ナル任意ノ $x, y \in E$ ニ對シテ $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq 1 - \delta(\varepsilon)$ トナルコトデアル。コノ條件ニ於テ $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ ハ $\|x\| \leqq 1$, $\|y\| \leqq 1$ ニヨツテ容易ニオキカヘラレル。紙上談話會　号又ハ東北數學誌　卷　頁參照。

$\varepsilon>0$ ハ任意ナル故 $\|x_N\| \to 0$

$\alpha>0$ ナルトキハ、任意ノ $\eta>0$ ニ對シテ $\varepsilon>0$ ヲ十分小サクトレバ

$$(\alpha+\varepsilon)\left(1-\delta\left(\frac{\eta}{\alpha+\varepsilon}\right)\right)<\alpha$$

然ルトキハ任意ノ $\|y\|<\alpha+\varepsilon$, $\|z\|<\alpha+\varepsilon$ ナル $y, z$ ニ對シテ $\|y-z\| \geqq \eta$ ナラバ $\left\|\frac{y+z}{2}\right\|<\alpha$.

ヨッテ $\|x_n\|<\alpha+\varepsilon$ ナル如キ $n$ ヲトレバ

$\|T^n x_n\|<\alpha+\varepsilon$, $\|\frac{1}{2}(x_n+T^n x_n)\|=\|x_{2n}\| \geqq \alpha$ ナルコトヨリ $\|x_n-T^n x_n\|<\eta$.

同様ニシテ $\|x_n-T^{kn}x_n\|<\eta$, $k=1, 2, \cdots\cdots$ (何トナレバ、モシ $\|x_n-T^{kn}x_n\| \geqq \eta$ ナラバ $y_n=\frac{1}{2}(x_n+T^{kn}x_n)$ ハ $\|y_n\|<\alpha$ ニテ、コレヨリ

$$\|x_{2kn}\|=\left\|\frac{1}{k}(y_n+T^n y_n+\cdots\cdots+T^{(k-1)n}y_n)\right\|$$
$$\leqq \|y_n\|<\alpha$$

トナリ矛盾ヲヒキオコスカラ.) ヨッテ任意ノ N ニ對シテ $kn \leqq N<(k+1)n$ ナル $k$ ヲ考ヘレバ

$$\|x_N-x_n\|=\frac{1}{N}\left\|\{nx_n+nT^n x_n+\cdots\cdots+nT^{(k-1)n}x_n + (T^{kn+1}+\cdots\cdots+T^N)x-Nx_n\}\right\|$$
$$\leqq \frac{1}{N}\left\{n\|T^n x_n-x_n\|+\cdots\cdots+n\|T^{(k-1)n}x_n-x_n\| + (N-kn)(\|x\|+\|x_n\|)\right\}$$
$$\leqq \frac{1}{N}\{(k-1)n\cdot\eta+(N-kn)(\|x\|+\|x_n\|)\}$$
$$<\eta+\frac{n}{N}(\|x\|+\|x_n\|)$$
$$<\eta+\frac{2n}{N}\|x\|$$

ヨツテ

$$\|x_N - x_{N'}\| \leqq 2\eta + 2\left(\frac{n}{N} + \frac{n}{N'}\right)\|x\|$$

右辺ハ $N, N' \to \infty$ ナルトキ（$n$ ハ *fixed*）$2\eta$ トナリ $\eta > 0$ ハ任意デアッタカラ $\{x_N\}$ ハ基本列デアル。