780. Markov過程ニ於ケルーツノ固有値問題

吉田　耕作（阪大）

$\Omega=(0,1)$ ニ屬スル點 x ガ單位時間ノ後ニ Ω ノ Borel 集合 E ニ移ル遷移確率ヲ $P(x,E)$ トスル．$P(x,E)$ ハ x ヲ fix スルトキ Ω ノ Borel 集合 E ニ關シテ totally additive，又 E ヲ fix スルトキ x ニ關シテ Borel 可測トスル。然ラバ之レニヨッテ定義サレル simple Markov 過程ニ於テ n 單位時間後ノ遷移確率ハ

$$P^{(n)}(x,E)=\int_{\Omega}P^{(n-1)}(x,dy)P(y,E),$$

$$P^{(1)}(x,E)=P(x,E)$$

ニヨッテ與ヘラレル譯デアル。

Ω ノ Borel 集合ニ關シテ totally additive ナ $f(E)$ ノ全体ハ norm

$$\|f\|_{\mathfrak{M}}=\text{total variation of } f \text{ on } \Omega$$

ニヨッテ Banach 空間 $(\mathfrak{M})$ ヲ作ル．$P(x,E)$ ハ $(\mathfrak{M})$ ノ $(\mathfrak{M})$ 内ヘノ線型作用素 P ヲ定義スル：

$$P\cdot f=g,\quad g(E)=\int_{\Omega}P(x,E)f(dx).$$

次ノ定理ヲ證明シタイ。

定理．適當ニ正整數 m ト完全連續ナ線型作用素 ∇ ヲトルトキ

(1) $\quad \|P^m - \nabla\|_{\mathfrak{M}} < 1$

トナルナラバ P ノ絶對値 1 ノ固有値 λ ハ全テ 1 ノ root デアル： $\lambda^n = 1$.

（注意） 適當ニ正整數 s ヲトルトキ，正數 $\delta, \eta\ (<1)$ ガ存在シテ $mes(E) < \eta$ ナルトキ x ニ關シテ一様ニ

(2) $\quad P^{(s)}(x, E) < 1 - \delta$

ナル條件ノ滿足サレルトキ (1) ガ成立シ且ツ $\lambda^n = 1$ ナルコトハ先ニ證明シタ（筆者談話 746）．之レガ " Doeblin ノ結果ノ積分方程式的取扱ヒ " ニ於テ essential ナ Lemma ヲ演ジタ．所ガ (1) ガ成立シテモ上ノ (2) ガ成立タヌ example ヲ作ルコトハ容易デアルカラ Doeblin ノ結果ガ (1) ノ假定ノ場合ニ迄實際ニ擴張サレタコトニナルノデアル。

$\boxed{\text{定理ノ證明}}$ $\|P\|_{\mathfrak{M}} = 1$ ハ明カダカラ，Frécht-kryloff-Bogolioubcff 定理ノ擴張（筆者談話 679，或ヒハ角谷氏談話 680）ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{P + P^2 + \cdots\cdots + P^n}{n} - P_1 \right\|_{\mathfrak{M}} = 0,$$

$$PP_1 = P_1P = P_1^2 = P_1$$

ナル如キ完全連續ナ $P_1 \neq 0$ ガ定ル．作用素 P_1 ヲ定義スル

kernel $P_1(x, E)$ ハ $P(x, E)$ ト共ニ

$$P_1(x, E) \geqq 0, \quad P_1(x, \Omega) \equiv 1$$

以上ヲ前置キトシテ

$\boxed{\text{第一段}}$　$P_1(x, E)$ ノ形．$(\mathfrak{M})$ ニ属スル $f_1(E)$, $f_2(E)$, ……, $f_l(E)$ ガ存在シテ $f_i(E) \geqq 0$,

$$f_i(\Omega) = 1$$

$$P_1(x, E) = \sum_{i=1}^{l} C_i(x) f_i(E), \quad 0 \leqq C_i(x) \leqq 1$$

且ツ
$$\sum_{i=1}^{l} C_i(x) \equiv 1$$

然シテ f_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ次ノ意味デ互ニ disjoint デアル：即チ各 f_i ノ variation positive ニナル点集合 E_i ガ互ニ disjoint.

以上ノ証明ハ談話 746 ノ (5) 式ノ導キ方ト同様ニヤルトヨイ。アソコデハ條件 (2) ト云フヨリ P_1 ガ完全連続ト云フコトシカ使ッテナイ。

第二段　同ジク F－K－B ノ定理ニヨリ P ノ絶對値 1 ノ固有値 λ ニ對シ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{P^i}{\lambda^i} - P_\lambda \right\|_{\mathfrak{M}} = 0.$$

$$PP_\lambda = P_\lambda P = \lambda P_\lambda$$

ナル如キ完全連続ナ $P_\lambda \neq 0$ ガ定ル．P_λ ヲ定義スル核 $P_\lambda(x, E)$ ニ於テ E ヲ fix シテ x ノ函数ト考ヘルト（$g(x)$ トスル）

(3) $\int_{\Omega} P(x, dy)\, g(y) = \lambda g(x)$

ヲ満足スル、即チ(3)ガ有界且ツ可測ナ $g(x) \neq 0$ ヲ解トスルノデアル。

第三段. $\|g\|_M = \underset{x \in \Omega}{u.b.} |g(x)| = 1$ ト仮定シテヨイ.

然ラバ $|g(x_0)| = 1$ ナル如キ点 $x_0 \in \Omega$ ガ存在スル. 以下其証。

(3)ヨリ

(4) $\int_{\Omega} P^{(s)}(x, dy)\, g(y) = \lambda^s g(x) \quad (s = 1, 2, \cdots\cdots)$

今 $E(\delta) = \underset{y}{E}(|g(y)| \geqq 1 - \delta)$ トオクト, $|\lambda| = 1$ ニヨリ $(\delta > 0)$

$$|g(x)| \leqq \int_{E(\delta)} P^{(s)}(x, dy) + (1-\delta) \int_{\Omega - E(\delta)} P^{(s)}(x, dy)$$

$$= 1 - \delta \int_{\Omega - E(\delta)} P^{(s)}(x, dy)$$

従ツテ

$$|g(x)| \leqq 1 - \delta \int_{\Omega - E(\delta)} P_1(x, dy) = 1 - \delta \int_{\sum_{i=1}^{l} E_i - E(\delta)} P_1(x, dy)$$

$\|g\|_M = 1$ ダカラ任意ノ $\eta\ (1 \geqq \eta > 0)$ ニ対シト $\eta \leqq |g(x')|$ ナル如キ x' 存在ス. ヨッテ

$$\eta \geqq \int_{\sum_i E_i - E(\delta)} P_1(x', dy) = \sum_{i=1}^{l} c_i(x') f_i(E_i - E(\delta))$$

$\sum_{i=1}^{l} c_i(x) \equiv 1$ 且ツ η 任意ダカラ少クトモーツノ i ニ對シ

$$f_i(E_i - E(\delta)) = 0$$

仍ッテ $\delta_j > 0$, $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$ ナル如キ單調減少列ニ對シ

常ニ

$$f_i(E_i - E(\delta_j)) = 0$$

ナル如キ $i (= 1, 2, \cdots\cdots, l)$ 存在スル．從ッテ

$$E(0) = \prod_j E(\delta_j) = \underset{x_0}{E}\{|g(x_0)| = 1\}$$

トスルト

$$f_i(E_i - E(0)) = 0$$

定義カラ $f_i(E_i) = 1$ ダカラ $E(0)$ ハ空集合

第四段　$|g(x_0)| = 1$ トスル。

$$\begin{cases} \int_\Omega P^{(s)}(x_0, dy)\, g(y) = \lambda^s g(x_0) & (s = 1, 2, \cdots\cdots) \\ \int_\Omega P^{(s)}(x_0, dy) = 1 \end{cases}$$

ニヨリ

$$(5) \quad \int_\Omega P^{(s)}(x_0, dy)\left\{1 - \frac{g(y)}{\lambda^s g(x_0)}\right\} = 0$$

$g(y)/\lambda^s g(x_0) = k^{(s)}(y)$ トオクト $\|g\|_M = 1$ カラ $|k^{(s)}(y)| \leqq 1$. 仍ッテ $k^{(s)}(y)$ ノ real part $m^{(s)}(y) \leqq 1$

且ツ $m^{(s)}(y)=1$ ナル y デハ $k^{(s)}(y)=1$ 即チ $g(y)=\lambda^{s}g(x_0)$ デアル。

構（5）ニヨリ

$$\int_{1-m^{(s)}(y)\geqq\delta>0} P^{(s)}(x_0, dy)\left\{1-m^{(s)}(y)\right\}=0 \qquad (s=1,2,\cdots\cdots)$$

従ッテ

$$\int_{1-m^{(s)}(y)<\delta} P^{(s)}(x_0, dy)=1$$

δ 任意ダカラ

$$(6) \qquad \int_{1=m^{(s)}(y)} P^{(s)}(x_0, dy)=1=\int_{g(y)=\lambda^{(s)}g(x_0)} P^{(s)}(x_0, dy)$$

今 $E^{(s)}=\underset{y}{E}\left\{g(y)=\lambda^{s}g(x_0)\right\}$ ト置クトキ

$$(7) \qquad E^{(s)}\cdot E^{(t)} \neq \text{空集合} \qquad (t\neq s)$$

ナル如キ s, t ガ存在スレバ $y\in E^{(s)}\cdot E^{(t)}$ トシテ

$$g(y)=\lambda^{s}g(x_0)=\lambda^{t}g(x_0) \quad \text{従ッテ} \quad \boxed{\lambda^{s-t}=1}$$

デ定理ガ証サレタコトニナル。

構（7）ヲ否定スレバ（6）ヨリ

$$P^{(s)}(x_0, E^{(s)})=1 \quad \text{且ツ} \quad P^{(s)}(x_0, E^{(t)})=0$$
$$(t\neq s)$$

ヲ得ル。

之レガ矛盾ナコトハ次ノ如クシテワカル。

$$P_1(x, E^{(s)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P^{(i)}(x_0, E^{(s)})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} P^{(s)}(x_0, E^{(s)}) = 0$$

従ッテ

$$P_1(x, E^{(s)}) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots\cdots)$$

total additivity カラ $P_1(x_0, \sum_s E^{(s)}) = 0$. 然ルニ

$$P^{(i)}(x_0, \sum_s E^{(s)}) = P^{(i)}(x_0, E^{(i)}) = 1$$

ダカラ

$$P_1(x_0, \sum_s E^{(s)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P^{(i)}(x_0, \sum_s E^{(s)}) = 1$$

デ矛盾。（以上）