779. Group ノ invariant measure ニツイテノ注意

河田　敬義(東大)

Group $\mathfrak{G}$ ノ additive class $\mathfrak{L}$ デ特ニ $E\subset\mathfrak{L}$ ナラ $aE,\ Ea\subset\mathfrak{L}$ ($a\in\mathfrak{G}$) ヲ満足スルトキ、其処デ定義サレタ measure m ($\infty\geqq m(E)\geqq 0$, $E\subset\mathfrak{L}$) ガ invariant トハスベテノ $E\subset\mathfrak{L}$ ニ對シテ $m(E)=m(aE)=m(Ea)$, $a\in\mathfrak{G}$ トイフコトトスル。

(以後 $\mathfrak{G}=\sum_{j=1}^{\infty}A_j$, $m(A_j)<+\infty$ トナルヤウナ m 丈ヲ考ヘルコトトスル。)

invariant measure ノ存在スルタメノ充分條件トシテ, 先ヅ

「$\mathfrak{L}$ デ定義サレタ measure m ガ

(1) $$\frac{m(xEy)}{m(E)}\geqq d>0$$

ガ、スベテノ $x,y\in\mathfrak{G}$ 及ビ $E\subset\mathfrak{L}$ ($m(E)\neq 0,\ +\infty$) ニ對シテ、夫等ニ無関係ナ常數 d ニヨツテ成立スルナラバ $\mathfrak{L}$ ノ invariant measure μ ガ存在シテ

(2) $$m(E)=\int_E f(x)\,d\mu(x)$$

ガ成立スル。($f(x)$ ハ μ-measurable non-negative function).」

(証明) $m^*(E)=\inf\limits_{x,y\in\mathfrak{G}} m(xEy)$, $E\subset\mathfrak{L}$

トオケバ、明カニ $m^*(E)=m^*(aE)=m^*(Ea)$ トナル。

又 (1) カラ直チニ

$$(3) \quad \alpha \cdot m(E) \leqq m^*(E) \leqq m(E)$$

ガ成立スル。又 m^* ノ定義カラ直チニ

(4) $A \supset B$ ナラバ $m^*(A) \geqq m^*(B)$, $A, B \subset \mathfrak{L}$

(5) $A \cap B = 0$ ナラバ $m^*(A+B) \geqq m^*(A) + m^*(B)$

トナル。コノ m^* ヲ用ヒテ今度ハ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ set E ニ對シテ

$$(6) \quad \mu(E) = \inf_{\substack{\sum_{i=1}^{\infty} A_i \supset E \\ A_i \subset \mathfrak{L}}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) \right)$$

ト置ケバ

○ $E \supset F$ ナラバ $\mu(E) \geqq \mu(F)$

○ $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

ヲ滿足スルカラ Carathéodory ノ outer measure デアル。又 m^* ハ invariant デアルカラ (6) ニヨリ

$$\mu(E) = \mu(aE) = \mu(Ea)$$

ガ成立スル。

又 $\mathfrak{L} \supset B$ ハ μ-measurable ナルコトハ、スベテノ $\mathfrak{G} \supset E$ ニ對シテ

$$(7) \quad \mu(E) = \mu(E \cap B) + \mu(E \cap CB)$$

ヲ證明スレバヨイ。(6) カラ $A_i \subset \mathfrak{L}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ適當ニトッテ $\sum A_i \supset E$ トスレバ

$$\mu(E)+\varepsilon \geqq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i \cap B + A_i \cap CB)$$

((5)式ヨリ) $$\geqq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i \cap B) + \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i \cap CB)$$

$\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i \cap B \supset E \cap B\right.$ ヨリ$\left.\right)$ $$\geqq \mu(B \cap E) + \mu(CB \cap E)$$

コヽニ ε ハ如何程デモ小トナルカラ

$$\mu(E) \geqq \mu(E \cap B) + \mu(E \cap CB)$$

トナル。

逆向ノ不等式ハ Carathéodory measure ノ條件中ニアルカラ (7) ガ成立ツ。

即チ $\mathcal{L}$ デ invariant measure ガ定義サレタコトニナル。

今 $m(A)=0$ ナラ $(A \subset \mathcal{L})$ m^* ノ定義カラ $m^*(A)=0$

$\therefore$ (6) カラ $\mu(A)=0$

逆ニ $\mu(A)=0$ $(A \subset \mathcal{L})$ ナラ (6) カラ

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*(B_i) < \varepsilon, \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i \supset A;\ B_i \subset \mathcal{L}\right)$$

ニ B_i ガトレルガ、(3) カラ

$$m(A) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) < \frac{1}{\alpha}\varepsilon$$

トナル。（此処デ初メテ假定 (1) ヲ用ヒタ） $\therefore$ $m(A)=0$

トナル。

即チ

(8) $\quad m(A)=0 \longleftrightarrow \mu(A)=0$

之レカラ Nikodym ノ定理ヲ用ヒレバ (2) ガ成立スル。——

今度ハ $\mathfrak{G}$ ニ Topology ノ入ッテ居ル場合ヲ考ヘ、m ヲ Haar ノ measure トスル。

『locally compact separable group $\mathfrak{G}$ デ（單位元 e ノマハリノ近傍系 U_i $(i=1,2,\cdots\cdots)$（U_i ハスベテ compact ニトル）ニ對シテ）m ヲ Haar ノ measure (left-invariant) トスルトキ、m ガ又 right-invariant ナルタメノ必要充分條件ハ

(9) $\quad m(x_i^{-1}U_ix_i)\longrightarrow 0$

ガ任意ノ $x_i\in\mathfrak{G}$ ニツイテ成立スルコトデアル。』

必要デアルコトハ勿論デアル。充分ナルコトハ先ヅ (9) カラ (1) ヲ導クコトガ出來ル。

ソレハ Haar ノ measure デハ unicity theorem ガ成立ツカラ

$$m_x(E)=m(Ex)=d_x\cdot m(E) \quad (d_x>0)$$

トナル。故ニ (1) ノ如キ d ガ存在シナイナラバ $x_i\in\mathfrak{G}$ ヲトリ $d_{x_i}\longrightarrow\infty$ トスルコトガ出來ル。

一方 $m(U_i)\rightarrow 0\ (m(U_i)>0)\ (i\rightarrow\infty)$ ナル故、適當ナル x_i ト U_i トヲ組合セレバ

$$m(x_i^{-1}U_ix_i)=m(U_ix_i)>1$$

トスルコトガ出來ルカラ，コレハ (9) ナル假定ニ反スル。故ニ (9) カラ (1) ガ成立スル。

一方共紀デツクッタ invariant ナ $\mu(E)$ ヲ考ヘレバ，

ソレハ又 left invariant ナル故、ソノ unicity カラ

$$\mu(E) = c \cdot m(E)$$

デナケレバナラナイ。コノ時(8)式ハ $c \neq 0, \neq \infty$ ナルコトヲ示シテヰル。即チ m 自身 invariant トナル。——

(9)式ノ成立スルヤウナ $\mathfrak{G}$ ノ例トシテハ、$\mathfrak{G}$ = invariant metric ノ入リ得ル様ナ場合，即チ D. van. Dantzig. "Zur topologische Algebra I" Math. Ann. 107, (1933), §5, Metrisierungsaxiom:

(10) 『$a_n \longrightarrow e$ ナラ $x_n^{-1} a_n x_n \longrightarrow e \; (x_n \in \mathfrak{G})$』

ノ成立スル場合デアル。コレハ又書キ直セバ、U_n ヲ上ノ如キ e ノ近傍系トスレバ

(10′) 『$U_n \longrightarrow e$ ナラ $x_n^{-1} U_n x_n \longrightarrow e \; (x_n \in \mathfrak{G})$』

トイフコトニナル。$x_n^{-1} U_n x_n \longrightarrow e$ ナラ勿論

$$m(x_n^{-1} U_n x_n) \longrightarrow 0$$

デアルカラ(10′)カラ(9)が出ル。即チ以上ヲハッキリカケバ

『locally compact separabel group $\mathfrak{G}$ が(10)ヲ満足スルナラバ（即チ invariant metric $\rho(a, b) = \rho(ac, bc) = \rho(ca, cb)$ ヲ $\mathfrak{G}$ ニ入ルコトが出来ルナラバ）$\mathfrak{G}$ ノ Haar measure ハ invariant デアル。』

（以上用ヒタ言葉ヤ定理ハ第176号小平氏ノ談話ヲ参照セラレタイ。）