778. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル Markoff 過程ニ就イテ II

角谷　静夫（阪大）

次ニ power series $\sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ ヲ考ヘル.

コレラハ何レモ $|z|<1$ ニテ正則ナ函数ヲ表ハシ, シカモ $\{k_n\}$, $\{p_n\}$ ノ定義ヨリ $|z|<1$ ニ於テ

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{1-\sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n}$$

ヲ満足スル。ヨッテ若シ $\sum_{n=1}^{\infty} k_n = k' < 1$ デアレバ右辺ハ

$z \to 1$ (real axis ニ沿ッテ) ナルトキ $\longrightarrow \frac{1}{1-k'}$ デアル

カラ $p_n \geqq 0$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナルコトヨリ

$$\lim_{z\to 1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{1-k'}<\infty$$

ヲ得ル。ヨッテコノ時ハ $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ ハ絶対收斂シ、シタガッテ勿論 $\lim_{n\to\infty}p_n=0$ デアル。次ニ $\sum_{n=1}^{\infty}k_n=1$ ナルトキハ $\sum_{n=1}^{\infty}n k_n=M$ ヲ考ヘル。$M<\infty$ カ又ハ $M=\infty$ デアル。

何レニシテモ

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{1-\sum_{n=1}^{\infty}k_n z^n}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}k_n(1+z+\cdots+z^{n-1})}=\frac{1}{M}$$

トナルコトハ容易ニワカルカラ

$$\lim_{z\to 1}(1-z)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\right)=\frac{1}{M}$$

ヲ得ル。但シ $M=\infty$ ナルトキハ $\frac{1}{M}=0$ トオクモノトスル。然ルニ $\{p_n\}$ ハ有界 $(0\leqq p_n\leqq 1)$ デアルカラ、コレヨリ直チニ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)=\frac{1}{M}$$

ヲ得ル。[(1)] 此ノ如クシテ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)$ ノ存在ガ証明出来タ。次ニ $\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{M}$ トナルコトヲ $\frac{1}{M}=p>0$

---

(1) 例ヘバ Wiener: Fourier Integral. chap. III. 104—106頁

コレヨリ Tauberian theorem ニヨッテ $p_n\to\frac{1}{M}$ トナルコトガ証明出来レバヨイノデアルガ、コレハ旨ク行カナイ様デアル。

ナル場合、即チ $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n = M < \infty$ ナル場合ニ、$k_n > 0$ トナル如キ n ノ最大公約数ガ1デアルトイフ條件ノ下デ証明スル。証明ヲ二段ニ分ツ。

<u>第一段</u> $\lim_{n \to \infty} p_n = \alpha > 0$ ナルコトヲ Khintchine ノ additive number theory ノ結果ヲ使ハズニ証明スルコト。

証明: p_{m+e} 次ノ如ク表ハスコトガ出来ル。

$$
\begin{aligned}
(4) \quad p_{m+e} = {} & p_m(k_1 p_{e-1} + k_2 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{e-2} p_2 + k_{e-1} p_1 + k_e) \\
& + p_{m-1}(k_2 p_{e-1} + k_3 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{e-1} p_2 + k_e p_1 + k_{e+1}) \\
& + p_{m-2}(k_3 p_{e-1} + k_4 p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_e p_2 + k_{e+1} p_1 + k_{e+2}) \\
& + \cdots\cdots\cdots \\
& + p_1(k_m p_{e-1} + k_{m+1} p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{m+e-3} p_2 + k_{m+e-2} p_1 + k_{m+e-1}) \\
& + (k_{m+1} p_{e-1} + k_{m+2} p_{e-2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + k_{m+e-2} p_2 + k_{m+e-1} p_1 + k_{m+e})
\end{aligned}
$$

コレハ recurrence formula (3) ヲ繰返ヘシテ用ヒルコトニヨッテモ得ラレルガ probability ノ考ヘニモドレバ直接得ラレル。即チ p_n ハ n 回目ニ元ヘ戻ル probability, k_n ハ n 回目ニ<u>ハジメテ</u>元ヘ戻ル probability ト考ヘレバヨイノデアル。更ニ

(5) $k_{\ell,j} = k_{j+1}\, p_{\ell-1} + k_{j+2}\, p_{\ell-2} + \cdots\cdots + k_{j+\ell-1} \cdot p_1$
$+ k_{j+\ell} \qquad j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, m, \cdots\cdots$

トオケバ $k_{\ell,0} = p_\ell$ ニテ $k_{\ell,j}$ $(j > 0)$ ハ $\ell, \ell+1, \cdots\cdots, \ell+j-1$ 回目ニハ元ヘ戻ラズニ $\ell+j$ 回目ニ元ヘ戻ル probability デアル。コノ $k_{\ell,j}$ ヲ使ヘバ

(4*) $p_{m+\ell} = p_m \cdot k_{\ell,0} + p_{m-1} \cdot k_{\ell,1} + \cdots + p_1 \cdot k_{\ell,m-1}$
$+ k_{\ell,m}$

トナリ、且ツ又、$k_{\ell,j}$ ノ定義ヨリ明カニ

$$k_{\ell,0} + k_{\ell,1} + \cdots\cdots + k_{\ell,m} + \cdots\cdots \leqq 1$$

又ハ

(6) $p_\ell + k_{\ell,1} + k_{\ell,2} + \cdots\cdots + k_{\ell,m} + \cdots\cdots \leqq 1$

次ニ (6) ガ ℓ ニ関シテ一様ニ収斂スルコトト、(6) ニ於テ実際ニ等号ガ成立スルコトヲ示サウ。(6) ガ ℓ ニ関シテ一様ニ収斂スルコトハ $k_{\ell,j}$ ノ定義 (5) 及ビ $\sum_{n=1}^{\infty} n k_n < \infty$ トナルコトヨリ明カデアロウ。実際 ℓ ニ無関係ニ

$$\sum_{m=M}^{\infty} k_{\ell,m} = \sum_{m=M}^{\infty} (k_{m+1} \cdot p_{\ell-1} + k_{m+2}\, p_{\ell-2} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + k_{m+\ell-1}\, p_1 + k_{m+\ell})$$
$$\leqq \sum_{m=M}^{\infty} (k_{m+1} + k_{m+2} + \cdots\cdots + k_{m+\ell-1} + k_{m+\ell})$$
$$\leqq k_{M+1} + 2 k_{M+2} + 3 k_{M+3} + \cdots\cdots$$
$$\leqq \sum_{m=M+1}^{\infty} m k_m$$

ヨツテ M ヲ十分大キクトレバ右辺、シタガツテ左辺ハ ℓ ニ

無関係ニイクラデモ小サクナル．次ニ（6）ニ於テ等号ガ成立スルトハ

$$p_l+k_{l,1}+k_{l,2}+\cdots\cdots+k_{l,m}$$

$$=(k_1p_{l-1}+k_2p_{l-2}+\cdots\cdots+k_{l-1}p_1+k_l)$$

$$+(k_2p_{l-1}+k_3p_{l-2}+\cdots\cdots+k_lp_1+k_{l+1})$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$+(k_mp_{l-1}+k_{m+1}p_{l-2}+\cdots\cdots+k_{m+l-2}p_1+k_{m+l-1})$$

$$+(k_{m+1}p_{l-1}+k_{m+2}p_{l-2}+\cdots\cdots+k_{m+l-1}p_1+k_{m+l})$$

$$=p_{l-1}(k_1+k_2+\cdots\cdots+k_{m+1})+p_{l-2}(k_2+k_3+\cdots\cdots+k_{m+2})+\cdots$$

$$+p_1(k_{l-1}+k_l+\cdots\cdots+k_{m+l-1})+(k_l+k_{l+1}+\cdots+k_{m+l})$$

$$=p_{l-1}+p_{l-2}(1-k_1)+\cdots\cdots+p_1(1-k_1-k_2-\cdots\cdots-k_{l-2})$$

$$+(1-k_1-k_2-\cdots\cdots-k_{l-1})$$

$$+O(k_{m+2}+2k_{m+3}+3k_{m+4}+\cdots\cdots)$$

然ルニ

$$p_{l-1}+p_{l-2}(1-k_1)+\cdots\cdots+p_1(1-k_1-k_2-\cdots\cdots-k_{l-2})$$

$$+(1-k_1-k_2-\cdots\cdots-k_{l-1})$$

$$=\{p_{l-1}-(p_{l-2}k_1+p_{l-3}k_2+\cdots\cdots+p_1k_{l-2}+k_{l-1})\}$$

$$+\{p_{l-2}-(p_{l-3}k_1+p_{l-4}k_2+\cdots\cdots+p_1k_{l-3}+k_{l-2})\}$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\{p_2-(p_1k_1+k_2)\}+\{p_1-k_1\}+1=1$$

デアルカラ，結局

$$p_l+k_{l,1}+k_{l,2}+\cdots\cdots+k_{l,m}=1+O\left(\sum_{n=M+1}^{\infty}nk_n\right)$$

ヨッテ

$$(7)\quad p_e+k_{e,1}+k_{e,2}+\cdots\cdots+k_{e,m}+\cdots\cdots=1$$

ヲ得ル。コレヨリ (4*) ヲ使ヘバ $m\geqq M$ ニ對シテ

$$\begin{aligned} p_{m+e} &\geqq p_m\cdot k_{e,0}+p_{m-1}\cdot k_{e,1}+\cdots\cdots+p_{m-M}\cdot k_{e,M}. \\ &\geqq\{\min(p_m,p_{m-1},\cdots\cdots,p_{m-M})\}(k_{e,0}+k_{e,1} \\ &\qquad +\cdots\cdots+k_{e,M}) \end{aligned}$$

ヨツテ先ヅ M ヲ十分大キクトツテ $k_{e,0}+k_{e,1}+\cdots\cdots\cdots+k_{e,M}\geqq\frac{1}{2}$ ガ任意ノ e ニ對シテ成立スルヤウニトリ。然ル後 m ヲ十分大キクトツテ $m-M>N$ ナル如クトレバ（但シ N ハ $n>N$ ナルトキニ常ニ $p_n>0$ トナルヤウナ N トスル。コノ樣ナ N ガ存在スルコトハ、$k_n>0$ トナル如キ n ノ最大公約數ガ 1 ナルコトヨリ容易ニワカル）．

$$\min(p_m,p_{m-1},\cdots\cdots,p_{m-M})=\alpha_0>0$$

トナルカラ結局 $m\geqq M+N$ ナル任意ノ m ニ對シテ $p_m\geqq\frac{1}{2}\alpha_0>0$ ガ成立スル。即チ $\varliminf_{n\to\infty}p_n=\alpha\geqq\frac{1}{2}\alpha_0>0$ デアル。

<u>第二段</u>　$\varliminf_{n\to\infty}p_n=\alpha>0$ ナルトキ $\lim_{n\to\infty}p_n$ ガ存在スルコトノ證明。

コレハ吉田氏ガ 173 号ニ於テ證明サレタノト全ク同ジヤウニスレバ出來ル。シカシ吉田氏ノ證明ニ少シ不十分ナ點ガアツタノデ、コンデソレヲオギナツテ證明スル。（吉田氏ノ證明ニ於テハ $p_e+\sum_{j=1}^{\infty}k_{e,j}$ ガ <u>e ニ關シテ</u>一樣ニ收斂スルト云フコトヲ注意シテナカツタノデアル）$\varlimsup_{n\to\infty}p_n=\beta$

トオキ $\beta>\alpha$ トシテ矛盾ヲ出セバヨイ。先ヅ (4^*) ニヨリ

$$p_{m+l}=p_m p_l+p_{m-1}\cdot k_{l,1}+p_{m-2}\cdot k_{l,2}+\cdots\cdots+p_1\cdot k_{l,m-1}+k_{l,m}$$

ヨツテ ε ガ任意ニ與ヘラレタトキ先ヅ M ヲ十分大キクトツテ l ニ無関係ニ

$$k_{l,M+1}+k_{l,M+2}+\cdots\cdots\leqq\varepsilon$$

トナル様ニスレバ $m\geqq M$ ニ對シテ

$$p_{m+l}\leqq p_m\cdot p_l+p_{m-1}\cdot k_{l,1}+p_{m-2}\cdot k_{l,2}+\cdots\cdots+p_{m-M}\cdot k_{l,M}+\varepsilon$$

次ニ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,p_n=\beta$ ナルコトヨリ，任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ N ガ定マッテ $n\geqq N$ ナルトキ $p_n<\beta+\varepsilon$ トナル。

更ニ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,p_n=\alpha$ ナルコトニヨリ、m ヲ十分大キクトッテ $p_m<\alpha+\varepsilon$，$m-M\geqq N$ トナルヤウニスルコトガ出来ル。

ヨッテ此ノ如キ m ニ對シテ

$$\begin{aligned}p_{m+l}&\leqq(\alpha+\varepsilon)p_l+(\beta+\varepsilon)k_{l,1}+(\beta+\varepsilon)k_{l,2}+\cdots\cdots+(\beta+\varepsilon)k_{l,M}+\varepsilon\\&=(\alpha+\varepsilon)p_l+(\beta+\varepsilon)(k_{l,1}+\cdots\cdots+k_{l,M})+\varepsilon\\&\leqq(\alpha+\varepsilon)p_l+(\beta+\varepsilon)(1-p_l)+\varepsilon\end{aligned}$$

$$p_{m+l}\leqq-(\beta-\alpha)p_l+\beta+2\varepsilon$$

コレハ m ヲ上記ノ如ク定メルト任意ノ l ニ対シテ成立スル式デアル、ヨッテ l ヲ十分大キクトッテ $p_{m+l}>\beta-\varepsilon$，$p_l>\alpha-\varepsilon$ ナル如クトレバ（コレハ可能！）

$$\beta-\varepsilon\leqq-(\beta-\alpha)(\alpha-\varepsilon)+\beta+2\varepsilon$$

トナル。$\varepsilon>0$、任意デアッタカラ $0<\alpha<\beta$ トスレバコレ

ハ矛盾デアル。ヨッテ $\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} p_n$ デナケレバナラナイ。

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(p_1 + \cdots + p_n) = \frac{1}{M}$ デアッタカラ $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{M}$ デナケレバナラヌコトハ明カデアル。

（注意）前号ニ掲ゲテ於イタ大キナ Matrix ノ形ヲ見ルト、$\sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)} = 1$ ナル場合ノ Matrix $\mathbb{K}$ ハ (l) ノ空間ノ norm ガ 1 ノ bounded linear transformation ヲ與ヘ、且ツ任意ノ $x \in (l)$ ニ対シテ $\{\mathbb{K}^{(n)}(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ガ (l) 内ニテ compact ナ集合ヲ作ッテヰルコトガワカル。ヨッテ $\frac{1}{n}\{\mathbb{K}(x) + \mathbb{K}^{(2)}(x) + \cdots\cdots + \mathbb{K}^{(n)}(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ モ、x ヲ一ツ定メレバ compact デアル。故ニ一般ノ Banach 空間ニ於ケル linear transformation ノ iteration ノ議論[1]ヨリ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\mathbb{K}^{(m)}\right\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ハ linear operator ノ sequence トシテ <u>strongly</u> ニ収斂スル。ヨッテ勿論 $\frac{1}{n}(p_{11}^{(1)} + p_{11}^{(2)} + \cdots\cdots + p_{11}^{(n)}) \to P_{11}$ ガ存在スル。

実際吉田氏ニヨッテ注意サレタ如ク各々ノ ergodic part ニ於テハ mean ergodic Theorem ガ成立シテヰルノデアル。コレハ (l_1) ニ於ケル positive element $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots\cdots)$ ガ positive element $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots)$ ニ各座標ガ収斂シ $(x_i^{(n)} \to x_i,$

---

(1) 吉田氏：紙上談話会 164 号 120，角谷．紙上談話会 162 号 711 (680)

$i=1,2,\cdots\cdots$) 且ツ $\|x_n\| \to \|x\|$.

(即チ $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}| \to \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$) ナラバ $x_n \to x$ strongly

トナルコトヨリ容易ニワカルノデアル。