777. 可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル Markov 過程 III

吉田　耕作（阪大）

§7. Mean ergodic theorem トノ関係

final set (ergodic part) ハ高々可附番無限個ノ点 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ ヨリ成リ且遷移確率 p_{ij}（点 y_i ヨリ単位時間後ニ点 y_j ニ移ル）ハ[1]

(1) 談話 763, §3.

$$
(1)\begin{cases}\text{任意ノ } i,j \text{ ニ對シ } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = K_j \ (i\text{ ニ無關係}) \\ \text{ガ存在シ且 } K_j \text{ 全テ} > 0,\ \sum_{j=1}^{\infty} K_j = 1. \end{cases}
$$

コノ時

$\boxed{\text{定理 3}}$ $\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i| < +\infty$ ナル如キ任意ノ數列 $\{\xi_i\}$ ニ對シ

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\frac{p_{ij}+p_{ij}^{(2)}+\cdots+p_{ij}^{(n)}}{n}-\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i K_j\right| = 0
$$

ガ成立スル。即チ final set ニ於テハ mean ergodic theorem[(1)] ガ成立ツ。

$\boxed{\text{證明}}$ $q_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)}$ ト置ク。任意ノ有界數列 $\{m_i\}$ ニ對シテ

$$
(2)\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i q_{ij}^{(n)}\right)m_j
$$

ガ $n\to\infty$ ナル時收斂スルコトヲ證明スレバ充分デアル。何若 Banach 空間 (l) デハ弱收斂ト强收斂トハ同等デアリ又 Banach 空間 (l) ハ weakly complete ダカラ[(2)]。或ハ又弱收斂カラ, mean ergodic theorem ニヨリ,

---

(1) 談話 720

(2) S. Banach: Théorie des opérations linéaires, p. 137

強收斂ガ出ルコトヲ使ッテモヨイ。

偖，絶対收斂性カラ(2)ハ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}q_{ij}^{(n)}m_j\right)$$

ト書ケル。$\lim\limits_{n\to\infty}q_{ij}^{(n)}=K_j>0,\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}K_j=1$ ニヨリ，$\{m_j\}$ ノ

有界ナコトヲ用ヒ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}q_{ij}^{(n)}m_j=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}q_{ij}^{(n)}\right)m_j=\sum_{j=1}^{\infty}K_jm_j.$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|<+\infty$ ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}q_{ij}^{(n)}m_j\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}q_{ij}^{(n)}m_j\right)$$

—— 以上 ——

(注意) *Banach*空間(l)ガ *locally weakly compact* デナイタメニ可附番無限個ノ可能ナ状態ニ関スル *Markov* 過程ニハ *mean ergodic theorem* ガ使ヘナカッタ。此ノタメニ筆者談話763或ハ角谷氏談話773ノ如キ方法ヲトラザルヲ得ナカッタ。

上ノ定理3ヲ氣付イテミルト，斯ル *Markov* 過程ノカラクリガ大分ハッキリシテ来タ様デス。即チ斯ル *Markov* 過程ハ *mean ergodic theorem* ' *apply* スル部分(*ergodic part*)ガ一般ニ可附番個及ビ *dissipative part* ニ分レル[(1)]訳デアリマス。

(1) 筆者談話763

Banach space (ℓ)ハ一般ニ$(-\infty, +\infty)$デ可積分ナ函数ノ作ル Banach space $L(-\infty, +\infty)$ト相似タモノデアルカラ，次ニハ $L(-\infty, +\infty)$ ニ於ケル Markov 過程ヲ論ジナケレバナラナイ。[1]

---

(1) $L(0,1)$デノ Markov 過程ハ筆者談話 746ヲミラレタイ。