774. 群ニ於ケルMaßトTopologieトノ関係ニツイテ（A. Weilノ定理ノ証明）II

小平　邦彦（東大）

§4. 擴張サレタEindeutigkeitssatz.

1. 擴張サレタEindeutigkeitssatz.　ノHaarノMaßニ關スルEindeutigkeitssatzハHaarノMaßニヨツテinduzierenサレタMaßニ擴張サレル。次ニコレヲ述ベヨウ。先ヅ補助定理カラ始メル：

補助定理　$\mathfrak{R}$ヲabzählbare Basisヲ有スルim Kleinen kompaktナ空間，$(\mathfrak{L})$ヲ$\mathfrak{R}$ノkompaktナBorel set全体ヨリ成ルBorel族トスル。コノトキ，μヲ$(\mathfrak{L})$デ定義サレタ有限ノ値ヲトルnicht-negativ, total additivナ集合函數トシ，μ^*ヲμニヨツテ定メラレタ$\mathfrak{R}$ノMaß[23]トスレバ，任意ノμ-meßbarナ部分集合$\mathfrak{A}$ニ對シテ

$$\mu(\mathfrak{A}) = \underline{\mathrm{fin}}_{\mathfrak{U} \supset \mathfrak{A}}\, \mu(\mathfrak{U}), \qquad \mathfrak{U}\text{ハ offen}$$

及ビ

$$\mu(\mathfrak{A}) = \overline{\mathrm{fin}}_{\mathfrak{F} < \mathfrak{A}}\, \mu(\mathfrak{F}), \qquad \mathfrak{F}\text{ハ abgeschlossen}$$

---

23) スナハチ

$$\mu^*(\mathfrak{A}) = \underline{\mathrm{fin}} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{L}_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{L}_j \supset \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{L}_j \in (\mathfrak{L})$$

デアル。§1 Nr 2 参照。

ガ成立スル。

證明. $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ部分集合 $\mathfrak{A}$ ニ對シテ

$$\bar{\mu}^*(\mathfrak{A})=\underset{\mathfrak{V}\supset\mathfrak{A}}{\mathrm{fin}}\ \mu(\mathfrak{V}),\qquad \mathfrak{V}\text{ ハ offen}$$

トオク. 然ルトキハ $\bar{\mu}^*$ モ $\mathfrak{R}$ ノ Maß デアッテ,

$$\bar{\mu}^*(\mathfrak{A})\geqq\mu^*(\mathfrak{A});$$

特ニ $\mathfrak{R}$ ノ開集合 $\mathfrak{V}$ ハ, 直チニ分ル如ク, $\bar{\mu}$-meßbar デアッテ

$$\bar{\mu}(\mathfrak{V})=\mu(\mathfrak{V})$$

デアル. 從ッテ, $\mathfrak{R}$ ノ Borel set $\mathfrak{B}$ ハ $\bar{\mu}$-meßbar デアッテ, $\mathfrak{V}\supset\mathfrak{B}$ ナル開集合 $\mathfrak{V}$ ヲトッテ考ヘレバ,

$$\bar{\mu}(\mathfrak{B})+\bar{\mu}(\mathfrak{V}-\mathfrak{B})=\mu(\mathfrak{B})+\mu(\mathfrak{V}-\mathfrak{B});$$

從ッテコレヲ上ノ不等式ト比ベレバ

$$\bar{\mu}(\mathfrak{B})=\mu(\mathfrak{B})$$

デナケレバナラナイ事ガ分ル。

$\mathfrak{A}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ部分集合トスレバ

$$\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A},\quad \mu(\mathfrak{B})=\mu^*(\mathfrak{A})$$

ナル Borel set $\mathfrak{B}$ ガ存在スル. コノトキ

$$\mu^*(\mathfrak{A})\leqq\bar{\mu}^*(\mathfrak{A})\leqq\bar{\mu}(\mathfrak{B})=\mu(\mathfrak{B})$$

デアルカラ

$$\bar{\mu}^*(\mathfrak{A})=\mu^*(\mathfrak{A})$$

從ッテ

$$\mu^*(\mathfrak{A})=\underset{\mathfrak{V}\supset\mathfrak{A}}{\mathrm{fin}}\ \mu(\mathfrak{V}),\qquad \mathfrak{V}\text{ ハ offen}$$

故ニ、$\mathfrak{A}$ ガ μ-meßbar ノトキハ、

$$\mu(\mathfrak{A}) = \overline{\mathrm{fin}}_{\mathfrak{F}\subset\mathfrak{A}}\ \mu(\mathfrak{F}),\qquad \mathfrak{F}\text{ ハ abgeschlossen}$$

デアル。(証明終)

<u>定理13 (Eindeutigkeitssatz)</u> $\mathfrak{G}$ ヲ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群トシ

$$G/N \subset \mathfrak{G}$$

トスル。コノトキ G ノ Weil ノ Maß m^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ次ノ 1), 2), 3) ガ成立スルコトデアル。

1) G/N ハ $\mathfrak{G}$ デ überall dicht デアル。

2) $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{G}$ ガ kompakt ナ Borel set ナルトキ $\gamma^{-1}(\mathfrak{B})$ ハ m-meßbar デアッテ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{B})) < +\infty$$

3) $A\subset G$ ガ m-meßbar ナルトキ

$$d_m(A, \gamma^{-1}(\mathfrak{B})) = 0$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ Borel set $\mathfrak{B}$ ガ存在スル。[24]

---

24) $d_m(A, \gamma^{-1}(\mathfrak{B})) = m(A-\gamma^{-1}(\mathfrak{B})) + m(\gamma^{-1}(\mathfrak{B})-A)$ デアッタ。§1 Nr. 4 参照。——

コノ定理ニ於テ m^* ガ Weil ノ Maß ナルコトガ重要デアル。実際ニソレヲ省ケバ他ノ点デハコノ定理ヨリモ更ニ強イ條件:

1) $G/N = \mathfrak{G}$

(次頁ニ続ク)

証明: 必要ナコトハ明白デアル。充分ナ事ヲ示スタメニ:

I) $\mathfrak{G}$ ノ kompakt ナ Borel set 全体ノ作ル Borel 族ヲ $(\mathfrak{b})$ デ現ハスコトトシ, $\mu(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{b}\in(\mathfrak{b})$ ヲ

$$\mu(\mathfrak{b}) = m(\gamma^{-1}(\mathfrak{b}))$$

ニヨッテ定義スレバ, μ ハ明ラカニ $(\mathfrak{b})$ デ total additiv ナ集合函数デアル。コノトキ μ ニヨッテ定メラレタ $\mathfrak{G}$ ノ Maß μ^* ハ Haar ノ Maß デアルコトヲ証明シヨウ。コノタメニハ μ^* ガ links-invariant ナルコトヲ示セバ

(脚註24ノ続キ)

2') $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{G}$ ガ Borel set ナラバ, $\mathfrak{b}$ ハ m-meßbar デ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{b}))=\mu(\mathfrak{b})$$

3') $A\subset G$ ガ m-meßbar ナラバ, Borel set $\mathfrak{b}$ ガ存在シテ

$$d_m(A,\gamma^{-1}(\mathfrak{b}))=0$$

ヲ満足スル links-invariant ナ Maß m^* デ, m^*_μ ト異ルモノガ存在スル。〔例〕 G ヲ非可附番個ノ元ヨリ成ル群トシ, $N=G$, $\mathfrak{G}=G/G$ ハ単位元ノミヨリ成ル kompakt ナ群トスル。コノトキ明ラカニ

$$m^*_\mu(A)=\begin{cases}0 & A=0\\ 1 & A\neq 0\end{cases}\qquad (A\subset G)$$

今 m^* ヲ

$$m^*(A)=\begin{cases}0 & A \text{ガ可附番集合ノトキ}\\ 1 & \text{然ラザルトキ}\end{cases}$$

ト定義スレバ, m^* ガ 1'), 2'), 3') ヲ満足スルコトハ容易ニ分ル。ソシテ明ラカニ $m^*\neq m^*_\mu$.

ヨイ。[25] 今 $\eta \in G/N$ トスレバ

$$\eta = r(y), \qquad y \in G$$

ナル y ガ存在スル。從ッテ任意ノ $\mathfrak{B} \in (\mathfrak{B})$ ニ對シテ

$$\mu(\eta \mathfrak{B}) = m(r^{-1}(\eta \mathfrak{B})) = m(y(r^{-1}(\mathfrak{B}))$$
$$= m(r^{-1}(\mathfrak{B})) = \mu(\mathfrak{B}).$$

然ルニ，定理ノ假定 I) ニヨッテ G/N ハ $\mathfrak{G}$ デ *überall dicht* デアルカラ，任意ノ $\xi \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ

$$\lim_{j \to \infty} \eta_j = \xi, \qquad \eta_j \in G/N$$

ガ存在スル。コノトキ，一方補助定理ニヨレバ，$\mathfrak{B} \in (\mathfrak{B})$ ニ對シテ，$\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘタトキ

$$\mathfrak{U} \supset \mathfrak{B} \supset \mathfrak{F}, \qquad \mu(\mathfrak{U} - \mathfrak{F}) < \varepsilon$$

及ビ

$$\mathfrak{U}_\xi \supset \xi \mathfrak{B} \supset \mathfrak{F}_\xi, \quad \mu(\mathfrak{U}_\xi - \mathfrak{F}_\xi) < \varepsilon$$

ナル開集合 $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_\xi$, 閉集合 $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\xi$ ガ存在スル．$\lim \eta_j = \xi$ デアルカラ，$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\xi$ ガ *kompakt* ナルコトニ注意スレバ j ガ充分大ナルトキ

$$\eta_j \mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}_\xi, \qquad \eta_j \mathfrak{U} \supset \mathfrak{F}_\xi$$

トナル。從ッテ

$$\mu(\mathfrak{F}) = \mu(\eta_j \mathfrak{F}) \leqq \mu(\mathfrak{U}_\xi),$$
$$\mu(\mathfrak{U}) = \mu(\eta_j \mathfrak{U}) \geqq \mu(\mathfrak{F}_\xi);$$

故ニ

$$\mu(\xi \mathfrak{B}) - 2\varepsilon \leqq \mu(\mathfrak{B}) \leqq \mu(\xi \mathfrak{B}) + 2\varepsilon.$$

---

25) §2 Nr 1, Haar ノ Maß ノ定義參照．

故ニ ξ ハ任意デアルカラ

$$\mu(\xi\mathfrak{L})=\mu(\mathfrak{L}) \qquad \xi\in\mathfrak{g},$$

從ツテ μ^* ハ links-invariant デアル。

II) コノトキ, $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{g}-G/N$ ナラバ $r^{-1}(\mathfrak{L})=0$

デアルカラ,

$$\mu(\mathfrak{L})=m(r^{-1}(\mathfrak{L}))=0$$

從ツテ

$$\mu_*(\mathfrak{g}-G/N)=0$$

デアル。故ニ

$$m_\mu^*(A)=\mu^*(r(A)), \qquad A\subset G$$

ニヨツテ, μ^* ニヨツテ induzieren サレタ Maß m^*_μ ガ

定マル. コノトキ明カニ Borel set $\mathfrak{L}$ ニ對シテハ

$$m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{L}))=m(r^{-1}(\mathfrak{L}))$$

III) $m(X)=0$ ナラバ $m^*_\mu(X)=0$ デアル. コレヲ

證明スルタメニ $y^{-1}x\in X$ ナル $G\times G$ ノ元 (x,y) ノ集合

ヲ Γ トスル: 從ツテ, Γ ノ charakteristische Funktion

ヲ $e_\Gamma(x,y)$ トスレバ

$$e_\Gamma(x,y)=e_X(y^{-1}x).$$

假定ニヨツテ, m^* ハ Weil ノ Maß デアルカラ, $e_X(y^{-1}x)$ ハ

m-meßbar デアル、故ニ

$$mm(\Gamma)=\iint e_X(y^{-1}x)\,m(dx)\,m(dy)$$

$$=\int m(dy)\int e_X(y^{-1}x)\,m(dx)=0.$$

從ツテ, 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$\Gamma \subset \sum_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) m(B_j) < \varepsilon$$

ナル m-meßbar ナ集合 A_j, B_j ガ存在スル。

然ルニ，假定ニヨッテ

$$d_m(A_j, \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{a}_j)) = 0, \quad d_m(B_j, \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_j)) = 0$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ Borel set $\mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{b}_j$ ガ存在スル。コノトキ

$$A^0 = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j - \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{a}_j)), \quad B^0 = \sum_{j=1}^{\infty} (B_j - \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_j))$$

トオケバ，明ラカニ

$$m(A^0) = 0, \quad m(B^0) = 0$$

デアッテ，

$$\Gamma \subset A^0 \times G + G \times B^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{a}_j) \times \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_j)$$

トナル。コノ関係ヲ charakteristische Funktion デ書ケバ

$$e_\Gamma(x, y) = e_X(y^{-1}x)$$

デアルカラ

$$e_X(y^{-1}x) \leqq e_{A^0}(x) + e_{B^0}(y) + \sum_{j=1}^{\infty} e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{a}_j)}(x) \cdot e_{\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{b}_j)}(y).$$

ココニ於テ

$$y^{-1}x = z$$

トオケバ

$$x = yz$$

デアルカラ

$$e_X(x) \leqq e_{A^\circ}(yx) + e_{B^\circ}(y)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} e_{\gamma^{-1}(\alpha_j)}(yx) \cdot e_{\gamma^{-1}(b_j)}(y),$$

或ハ
$$e_X(x) \leqq e_{A^\circ x^{-1}}(y) + e_{B^\circ}(y)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} e_{\gamma^{-1}(\alpha_j)\cdot x^{-1}}(y) \cdot e_{\gamma^{-1}(b_j)}(y).$$

然ルニ，m^* ハ Weil ノ Map デアルカラ，定理ヲカラ直チニ分ル如ク，一般ニ A ガ m-mepbar ナルトキハ，Aa モ m-mepbar デアッテ，特ニ $m(A)=0$ ノトキハ $m(Aa)=0$ デアル。[26] 従ッテ上ノ不等式ヲ y ニツイテ積分スレバ

$$e_X(x)\, m(G) \leqq \int_G \sum_{j=1}^{\infty} e_{\gamma^{-1}(\alpha_j)\cdot x^{-1}}(y)\, e_{\gamma^{-1}(b_j)}(y)\, m(dy)$$ [27]

ヲ得ル。今簡単ノタメ

$$\sum_{j=1}^{\infty} e_{\gamma^{-1}(\alpha_j)\cdot x^{-1}}(y)\, e_{\gamma^{-1}(b_j)}(y) = c(y, x)$$

---

26) 何トナレバ，A ガ m-mepbar ナラバ A^{-1}，従ッテ $a^{-1}A^{-1}$ ガ m-mepbar. 従ッテ $Aa=(a^{-1}A^{-1})^{-1}$ ガ m-mepbar デアル。特ニ $m(A)=0$ トスレバ，$m(A^{-1})=m(a^{-1}A^{-1})=0$，従ッテ $Aa=(a^{-1}A^{-1})^{-1}$ デアルカラ，$m(Aa)=0$.

27) 一般ニハ $m(G)=+\infty$ デアルガ，コノトキ $e_X(x)=0$ ナラバ $e_X(x)\,m(G)=0$ ト約束スル。一般ニ，Map ノ計算ニ於テハ $0\cdot\infty=0$ ト考ヘルノガ便利デアル。Saks: Theory of Integral 参照。

トオケバ，明ラカニ

$$\int_G c(y,z)\,m(dy)=\sum_{j=1}^{\infty} m(r^{-1}(\mathfrak{a}_j\cdot r(z^{-1})\frown\mathfrak{b}_j))$$

デアッテ、$\mathfrak{a}_j$，$\mathfrak{b}_j$ ハ Borel set デアルカラ，III) ノ結果ニヨレバ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{a}_j\cdot r(z^{-1})\frown\mathfrak{b}_j))=m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{a}_j\cdot r(z^{-1})\frown\mathfrak{b}_j));$$

従ッテ

$$\int_G c(y,z)\,m(dy)=\int_G c(y,z)\,m_\mu(dy).$$

故ニ

$$e_x(z)\,m(G)\leqq\int_G c(y,z)\,m_\mu(dy)$$

デアル。

然レニ

$$c(y,z)=\sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\mathfrak{a}_j)}(yz)\,e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_j)}(y)$$

デアルカラ，定理12ニヨッテ，$c(y,z)$ ハ y，z ノ m_μ-measurable ノ函数デアル。従ッテ，Fubini ノ定理ヲ利用スレバ

$$\iint_{G\times G} c(y,z)\,m_\mu(dy)\,m_\mu(dz)$$

$$=\int_G m_\mu(dy)\int_G \sum_{j=1}^{\infty} e_{r^{-1}(\mathfrak{a}_j)}(yz)\,e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_j)}(y)\,m_\mu(dz)$$

$$=\int_G \sum_{j=1}^{\infty} m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{a}_j))\,e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_j)}(y)\,m_\mu(dy)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty} m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{a}_j))\, m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{b}_j)).$$

コヽニ於テ, $\mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{b}_j$ ハ

$$d_m(A_j,\ r^{-1}(\mathfrak{a}_j))=0,\qquad d_m(B_j,\ r^{-1}(\mathfrak{b}_j))=0$$

ナル様ニ選ンダ Borel set デアルカラ

$$m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{a}_j))=m(A_j),\qquad m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{b}_j))=m(B_j);$$

故ニ, 假定ニヨツテ

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{a}_j))\, m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{b}_j))=\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)\, m(B_j)<\varepsilon,$$

從ツテ

$$\iint_{G\times G} c(y,z)\, m_\mu(dy)\, m_\mu(dz)<\varepsilon,$$

故ニ, Fubini ノ定理ニヨツテ

$$\int_G m_\mu(dz)\int_G c(y,z)\, m_\mu(dy)<\varepsilon$$

デアル、故ニ今

$$m(G)\leq\int_G c(y,z)\, m_\mu(dy)$$

ナル z ノ集合ヲ Z_ε トスレバ, Z_ε ハ m_μ-meßbar デアツテ

$$m(G)\, m_\mu(Z_\varepsilon)<\varepsilon,$$

從ツテ, ε ハ任意デアルカラ $m_\mu(Z_\varepsilon)$ ヲ如何程デモ小サクスルコトガ出來ル。[28]　　（脚註ハ次頁ニ）

然ルニ、既ニ証明シタ結果ニヨレバ

$$e_X(z)m(G) \leqq \int_G c(y, z) m_\mu(dy)$$

デアルカラ

$$X \subset Z$$

デナケレバナラナイ。故ニ

$$m_\mu(X) = 0$$

IV) $m^* = m_\mu^*$ デアル。コレヲ証明スルタメニ；A ヲ G ノ任意ノ部分集合トスレバ，

$$r^{-1}(\mathfrak{b}) \supset A, \quad m_\mu^*(A) = m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{b}))$$

ナル Borel set $\mathfrak{b}$ ガ存在スルカラ，

$$m^*(A) \leqq m(r^{-1}(\mathfrak{b})) = m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{b})) = m_\mu^*(A)$$

又，逆ニ、A ニ對シテ

$$A \subset B, \quad m^*(A) = m(B)$$

ナル m-mesbar ナ部分集合 B ガ存在スル。B ニ對シテ

$$d_m(B, r^{-1}(\mathfrak{b})) = 0$$

ナル Borel set $\mathfrak{b}$ ヲトレバ

$$m(B - r^{-1}(\mathfrak{b})) = 0$$

デアルカラ，III) ニヨッテ

$$m_\mu(B - r^{-1}(\mathfrak{b})) = 0$$

従ッテ

$$B \subset r^{-1}(\mathfrak{b}) + (B - r^{-1}(\mathfrak{b}))$$

---

28) $m(G) = +\infty$ ノトキハ，$m_\mu(Z_\varepsilon) = 0$ デアル。脚註27参照

デアルカラ.

$$m_\mu^*(B) \leqq m_\mu(\gamma^{-1}(\mathfrak{b})) = m(\gamma^{-1}(\mathfrak{b})) = m(B).$$

故ニ, $A \subset B$ デアッタカラ

$$m_\mu^*(A) \leqq m^*(A).$$

故ニ

$$m_\mu^*(A) = m^*(A).$$ (証明終)

2. 充分條件. 後デ應用スルタメニ, コノ定理13ノ充分條件ヲ次ノ形ニ拡張シテオク:[29)]

<u>定理14.</u> (充分條件) $\mathfrak{g}$ ヲ *links-invariant* ナ *Metrik* ヲ有スル *separabel*, *vollständig* ナ *topologische Gruppe*, G ヲ $G/N \subset \mathfrak{g}$ ナル群トシ, m^* ヲ G ノ *Weil* ノ *Maß* トスル. コノトキ次ノ條件

---

29) $\mathfrak{g}$ ガ *abzählbare Basis* ヲ有スル *im Kleinen kompakt* ナ群ナルトキ, μ ヲソノ *Haar* ノ *Maß* トスレバ, 定理6ニヨレバ, $\mathfrak{g}$ ハ $\mathfrak{h}_\mathfrak{g}^{(\mu)}$ ノ *unitärer Operator* ノ作ル群 $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_\mathfrak{g}^{(\mu)}}$ ニ *topologisch isomorph* ニ *einbetten* セラレル. 然ルニ定理2ニヨレバ, $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_\mathfrak{g}^{(\mu)}}$ ハ *links-invariant* ナ *Metrik* ヲ有スル. 從ッテ

定理. *abzählbare Basis* ヲ有スル *im Kleinen kompakt* ナ群ハ *links-invariant* ナ *Metrik* ヲ有スル *separabel*, *vollständig* ナ群デアル.

—— コノ定理ニヨッテ, 定理14ガ定理13ノ充分條件ノ拡張ナルコトガ分ル.

1) — 4) が成立スルナラバ, $\mathfrak{G}$ハ im Kleinen kompakt デアッテ, m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアル:

1) G/N ハ $\mathfrak{G}$ デ überall dicht,

2) $\mathfrak{U}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ開集合ナルトキ $\gamma^{-1}(\mathfrak{U})$ ハ m-meßbar デアル;

3) 充分小サイ開集合 $\mathfrak{U}$ ヲトレバ $m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}))<+\infty$,

4) $A\in(m)$ ナルトキハ, 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$d_m(A,\gamma^{-1}(\mathfrak{U}))<\varepsilon$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ開集合 $\mathfrak{U}$ ガ存在スル.

證明: $\mathfrak{G}$ ノ links-invariant ナ Metrik ヲ ρ トシ, ρ ニ關スル 1 ノ ε-Umgebung ヲ $\mathfrak{U}_\varepsilon$ デ現ハス: スナハチ

$$\mathfrak{U}_\varepsilon=(\xi;\ \rho(\xi,1)<\varepsilon).$$

I) コノトキ, $\mathfrak{G}$ ハ separabel, G/N ガ $\mathfrak{G}$ デ überall dicht デアルカラ G カラ可附番個ノ元 x_j ($j=1,2,3$ -----) ヲ選ンデ

$$\sum_{j=1}^{\infty}\gamma(x_j)\mathfrak{U}_\varepsilon=\mathfrak{G}$$

ナラシメルコトガ出來ル. 從ッテ, コノトキ

$$\sum_{j=1}^{\infty}x_j\cdot\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_\varepsilon)=G;$$

故ニ, m^* ハ links-invariant, $m(G)>0$ デアルカラ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\varepsilon}))>0$$

デナケレバナラナイ。

II) 假定ニヨッテ，ε_0 ヲ充分小サクトレバ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\varepsilon_0}))<+\infty$$

トナル．コノトキ，$\varepsilon_1<\varepsilon_0$ トスレバ $\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}$ ハ *kompakt* デアル：何トナレバ，若シ $\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}$ ガ *kompakt* デナイトスレバ，$\varepsilon>0$ ヲ充分小サクトレバ，$\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}$ ハ有限ノ ε-Netz ヲ有シナイ．從ッテ，G/N ガ $\mathfrak{G}$ デ *überall dicht* デアルカラ，G カラ無限個ノ元 x_j $(j=1,2,\ldots\ldots)$ ヲ選ンデ

$$\gamma(x_j)\in\mathfrak{U}_{\varepsilon_1},\quad \rho(\gamma(x_j),\gamma(x_k))>\varepsilon$$
$$(j\neq k),$$

ナラシメルコトガ出來ル。

$$\delta<\mathrm{Min.}\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \varepsilon_0-\varepsilon_1\right)$$

ナル正數トスレバ，從ッテ

$$\gamma(x_j)\mathfrak{U}_{\delta}\subset\mathfrak{U}_{\varepsilon_0},$$
$$\gamma(x_j)\mathfrak{U}_{\delta}\frown\gamma(x_k)\mathfrak{U}_{\delta}=0\qquad(j\neq k),$$

從ッテ

$$x_j\cdot\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\delta})\subset\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\varepsilon_0}),$$
$$x_j\cdot\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\delta})\frown x_k\cdot\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\delta})=0\qquad(j\neq k).$$

故ニ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\varepsilon_0}))\geqq\sum_{j=1}^{\infty}m(x_j\cdot\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\delta}))$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_{\delta})),$$

従ッテ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_\delta))=0$$

デナケレバナラナイ。コレハ I）ノ結果ニ反スル。——故ニ $\mathfrak{U}_{\varepsilon_1}$ ハ kompakt. 従ッテ $\mathfrak{G}$ ハ im Kleinen kompakt デアル。

III） m^* ガ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ナルコトヲ示スタメニハ，定理 13 ノ條件 2) 及ビ 3) ガ成立スルコトヲ証明スレバヨイ。一般ニ $\mathfrak{G}$ ノ開集合ヲ $\mathfrak{U}$, Borel 集合ヲ $\mathfrak{L}$ デ表ハスコトニスレバ

i) $\gamma^{-1}(\mathfrak{U})$ ガ m-meßbar デアルカラ $\gamma^{-1}(\mathfrak{L})$ モ亦 m-meßbar デアル。

ii) $\mathfrak{L}$ ガ kompakt ナルトキハ，$\mathfrak{U}_\varepsilon$ ヲ單位元ノ任意ノ近傍トシタトキ，有限個ノ $x_j\in G\ (j=1,2,\cdots\cdots J)$ ヲ適當ニ選ンデ

$$\mathfrak{L}\subset\sum_{j=1}^{J}\gamma(x_j)\ \mathfrak{U}_\varepsilon,$$

従ッテ

$$\gamma^{-1}(\mathfrak{L})\subset\sum_{j=1}^{J}x_j\cdot\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_\varepsilon)$$

ナラシメルコトガ出来ル 故ニ，$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_\varepsilon))$ ガ有限ナル様ニ $\mathfrak{U}_\varepsilon$ ヲ定メテオケバ．

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{L}))<+\infty$$

デナケレバナラナイコトガ分ル。

IV） $A\in(m)$ トスレバ，假定ニヨッテ

$$d_m(A, \gamma^{-1}(\mathfrak{U}_k)) < \frac{1}{2^k}$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ開集合 $\mathfrak{U}_k$ が存在スル．コノトキ

$$\mathfrak{L} = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \mathfrak{U}_k$$

トオケバ，明ラカニ $\mathfrak{L}$ ハ Borel set デアッテ

$$d_m(A, \gamma^{-1}(\mathfrak{L})) = 0.^{30)}$$ （証明終）

§5. Weil ノ定理

1. Isomorphiesatz ト Separabilitätseigenschaft. $\mathfrak{G}$ ヲ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群，μ^* ヲソノ Haar ノ Maß トシ，G ヲ $G/N \subset \mathfrak{G}$ ナル群，m^*_μ ヲ μ^* ニヨッテ induzieren サレタ G ノ Maß トスル．[31] コノトキ

定理 15. $f(\xi)$ ヲ $\xi \in \mathfrak{G}$ ノ μ-meßbar ナ函数トス

---

30) 何トナレバ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{L}) - A) = m\Big(\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} (\gamma^{-1}(\mathfrak{U}_k) - A)\Big)$$

$$\leqq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

$$m(A - \gamma^{-1}(\mathfrak{L})) = m\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=j}^{\infty} (A - \gamma^{-1}(\mathfrak{U}_k))\Big) = 0.$$

31) 従ッテ $\mu_*(\mathfrak{G} - G/N) = 0$ デアル．§3 Nr 2; m^*_μ ノ定義参照

レバ，$x \in \mathfrak{G}$ ノ函数 $f(r(x))$[32] ハ m_μ-meßbar デアッテ

$$\int_{\mathfrak{g}} f(\xi)\,\mu(d\xi) = \int_{\mathfrak{G}} f(r(x))\,m_\mu(dx).$$

証明． 定理8ニヨレバ，一般ニ $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ガ μ-meßbar ナルトキハ $r^{-1}(\mathfrak{a})$ ハ m_μ-meßbar デアッテ

$$\mu(\mathfrak{a}) = m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{a}));$$

従ッテ，$\mathfrak{a}$ ノ charakteristische Funktion ヲ $e_{\mathfrak{a}}(\xi)$ トスレバ

$$\int_{\mathfrak{g}} e_{\mathfrak{a}}(\xi)\,\mu(d\xi) = \int_{\mathfrak{G}} e_{\mathfrak{a}}(r(x))\,m_\mu(dx).$$

然ルニ，μ-meßbar ナ $f(\xi)$ ハ，μ-meßbar ナ charakteristische Funktion ノ一次結合ノ limit デアルカラ，従ッテ．$f(r(x))$ ハ m_μ-meßbar デアッテ，

$$\int_{\mathfrak{g}} f(\xi)\,\mu(d\xi) = \int_{\mathfrak{G}} f(r(x))\,m_\mu(dx). \quad (q.e.d)$$

<u>定理16</u>．(Isomorphiesatz)　$\xi \in \mathfrak{g}$ ノ函数 $f(\xi)$ = $x \in \mathfrak{G}$ ノ函数 $f(r(x))$ ヲ對應サセル對應：$f(\xi) \longrightarrow f(r(x))$ ニヨッテ，$\mathfrak{H}_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ ト $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(m_\mu)}$ ガ isomorph ニナル。[33]

---

(32) $r(x)$ ハ x ノ mod N ノ Restklasse ヲ現ハス．§3.Nr 2 参照．

(33) 一般ニ m^* ガ空間 R ノ Maß ナルトキ，$\mathfrak{H}_R^{(m)}$ ハ R デ m-quadrat summierbar ナル函数全体ノ作ル Hilbert 空間デアル．$\mathfrak{H}_R^{(m)}$ ニ於ケル inneres Produkt ヲ（資

証明。 $f=f(\xi)$ ニ對シテ $f(r(x))$ ヲ $f\cdot r$, 從ッテ Abbildung $f\to f\cdot r$ ニヨル $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ ノ Bild ヲ $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}\cdot r$ デ現ハスコトニスレバ: $f, g\in \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ ナルトキ, 定理15ニヨッテ

$$(f, g)_\mu=(f\cdot r, g\cdot r)_{m_\mu};$$

從ッテ, $f\to f\cdot r$ ニヨッテ $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ ハ $\mathfrak{L}_G^{(m_\mu)}$ 内ニ isomorph ニ einbetten セラレル。

逆ニ, 今 $\varphi=\varphi(x)$ ヲ $\mathfrak{L}_G^{(m_\mu)}$ ノ任意ノ元トスレバ, $\varphi(x)$ ハ m_μ-meßbar ナル G ノ部分集合 $A_j^{(N)}$ ニヨッテ

$$\varphi(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_j \alpha_j\, e_{A_j^{(N)}}(x) \qquad (\alpha_j \text{ハ複素數})$$

ナル形ニ現ハサレル. 然ルニ定理9ニヨレバ, 各 $A_j^{(N)}$ ニ對シテ

$$A_j^{(N)}\subset r^{-1}(\mathfrak{b}_j^{(N)}),\quad m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{b}_j^{(N)})-A_j^{(N)})=0$$

ナル Borel set $\mathfrak{b}_j^{(N)}\subset \mathfrak{g}$ が存在スル; 從ッテ charakteristische Funktion ニツイテ言ヘバ

$$\| e_{A_j^{(N)}}-e_{\mathfrak{b}_j^{(N)}}\cdot r\|_{m_\mu}=0$$

故ニ

$$\lim_{N=\infty}\|\varphi-\sum_j \alpha_j\, e_{\mathfrak{b}_j^{(N)}}\cdot r\|_{m_\mu}=0,$$

從ッテ $\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}\cdot r$ ハ $\mathfrak{L}_G^{(m_\mu)}$ デ überall dicht デアル. 故

註; 統キ

$(f, g)_m$, 長サヲ $\|f\|_m$ ト書ク. §1 Nr 4 參照.

ニ，$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(\mu)}$ ハ vollständig デアルカラ $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(\mu)}\cdot\gamma=\mathfrak{H}_{G}^{(m_\mu)}$ デナケレバナラナイ。（証明終）

——一般ニ m^* ガ空間 R ノ Maß ナルトキ，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_{R}^{(m)}$ ガ separabel ナラバ，吾々ハ Maß m^* ハ separabel デアルトイフコトニスル。定理1ニヨツテ之レヲ言ヒ直セバ：

定義．(m) ガ距離 d_m ニ関シテ separabel ナルトキ，Maß m^* ハ separabel デアルトイフ。

既ニ述ベタ如ク，[34] $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(\mu)}$ ハ separabel デアル．從ツテ Isomorphiesatz ニヨツテ

定理17．Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß ハ separabel デアル。

2. Weil ノ定理．定理11及ビ17ニヨツテ，Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß ハ separabel ナ Weil ノ Maß ナルコトガ知ラレル。逆ニ：

Weil ノ定理．separabel ナ Weil ノ Maß ハ Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß デアル。スナハチ m^* ヲ群 G ノ separabel ナル Weil ノ Maß トスレバ，G ノ Normalteiler N 及ビ G/N ヲ含ム abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群 $\mathfrak{G}$ ガ存在シテ，m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß ト一致スル。

証明．假定ニヨツテ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_G=\mathfrak{H}_G^{(m)}$ ハ

---

34) §2 Nr 3 参照.

separabel デアルカラ，定理2ニヨッテ、$\mathfrak{H}_G$ ノ unitärer Operator ノ作ル群 $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}_G}$ ハ links-invariant ナ Metrik ヲ有スル separabel, vollständig ナ群デアル。

$a \in G$ ニ対シテ U_a ヲ

$$U_a \cdot f(x) = f(a^{-1}x), \qquad f(x) \in \mathfrak{H}_G$$

ニヨッテ定義サレタ unitärer Operator トスレバ，明ラカニ

$$U_a U_b = U_{ab};$$

従ッテ N ヲ $U_a = 1$ ナル a 全体ヨリ成ル Normalteiler トスレバ，$a \to U_a$ ニヨッテ G/N ハ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}_G}$ 内ニ isomorph ニ einbetten サレル．コヽニ於テ，$a \in G$ ノ mod N ノ Restklasse $r(a)$ ト U_a ヲ identifizieren シテ G/N ヲ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}_G}$ ノ部分群ト考ヘル：

$$r(a) = U_a, \qquad G/N \subset \mathfrak{U}_{\mathfrak{H}_G};$$

然ル後 G/N ノ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}_G}$ 内ノ abgeschlossene Hülle ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ，明ラカニ $\mathfrak{G}$ ハ links-invariant ナ Metrik ヲ有スル separabel, vollständig ナ群デアッテ，G/N ハ $\mathfrak{G}$ 内デ überall dicht デアル。

従ッテ m^* ガ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ナルコトヲ証明スルタメニハ，定理14ノ條件 2)，3) 及ビ 4) ガ成立スルコトヲ示セバヨイ。——

I) $\mathfrak{G}$ ノ元 U_0 ノ近傍 $\mathfrak{V}$ ハ

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(U_0; f_1 \cdots\cdots f_k, \varepsilon)$$
$$= (U; \|(U - U_0) f_j\| < \varepsilon, \quad 1 \leqq j \leqq k)$$

ナル形ヲモツ。[35] 従ッテ $\gamma(a)=\mathfrak{U}_a$ デアッタカラ, $\mathfrak{v}_0 f_j = g_j$ トオケバ

$$\gamma^{-1}(\mathfrak{U}) = \left(a;\ \int_G \left| f_j(a^{-1}x) - g_j(x)\right|^2 m(dx) < \varepsilon^2,\ 1 \leqq j \leqq k\right).$$

然ルニ, m^* ハ Weil ノ Mapp デアルカラ $f_j(a^{-1}x) - g_j(x)$ ハ a, x ニ変数ノ m-meßbar ナル函数, 従ッテ Fubini ノ定理ニヨッテ $\gamma^{-1}(\mathfrak{U})$ ガ m-meßbar ナルコトガ分ル。故ニ一般ニ $\mathfrak{U}$ ガ開集合ノトキモ $\gamma^{-1}(\mathfrak{U})$ ハ m-meßbar デアル。

II) 充分小サイ開集合 $\mathfrak{U}$ ヲトレバ $m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U})) < +\infty$ デアル。コレヲ証明スルタメニ A ヲ

$$0 < m(A) < +\infty, \qquad 0 < m(A^{-1}) < +\infty$$

ナル m-meßbar ナ部分集合トシ, [36] $\mathfrak{U}$ ヲ

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(1;\ e_A,\ \varepsilon)$$

トオケバ, 明ラカニ

$$\gamma^{-1}(\mathfrak{U}) = \left(a;\ \int_G \left| e_A(a^{-1}x) - e_A(x)\right| m(dx) < \varepsilon^2\right)$$

然ルニ

$$\int_G \left| e_A(a^{-1}x) - e_A(x)\right| m(dx)$$

$$= 2m(A) - 2\int_G e_A(a^{-1}x)\, e_A(x)\, m(dx)$$

デアルカラ

---

35) §1 Nr 5 参照.

36) カクノ如キ A ガ存在スルコトハ定理 7 ヨリ証明サレル.

$$\gamma^{-1}(\mathfrak{U})=\left(a\,;\int_G e_A(a^{-1}x)\,e_A(x)\,m(dx)>m(A)-\frac{\varepsilon^2}{2}\right);$$

従ッテ

$$\int_G m(da)\int_G e_A(a^{-1}x)\,e_A(x)\,m(dx)>\left(m(A)-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U})).$$

故ニ Fubini ノ定理ニヨッテ

$$\left(m(A)-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}))<\int_G m(dx)\int_G e_{xA^{-1}}(a)\,e_A(x)\,m(da)$$

$$=m(A^{-1})\,m(A)<+\infty.$$

故ニ，豫メ ε ヲ充分小サクトッテオケバ

$$m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}))<+\infty$$

III) $\mathfrak{U}$ 及ビ $\mathfrak{U}_1$ ヲ

$$\mathfrak{U}_1\subset\overline{\mathfrak{U}_1}\subset\mathfrak{U},\quad m(\gamma^{-1}(\mathfrak{U}))<+\infty$$

トル $\mathfrak{G}$ ノ開集合トシ，A ヲ

$$\overline{\gamma(A)}\subset\mathfrak{U}_1,\qquad m(A^{-1})<+\infty$$

ナル m-mepbar ナ G ノ部分集合トスル．但シコヽニ於テ $\overline{\mathfrak{U}_1}$ 及ビ $\overline{\gamma(A)}$ ハ夫々 $\mathfrak{U}_1$ 及ビ $\gamma(A)$ ノ abgeschlossene Hülle ヲ現ハスモノトスル．コノトキ，$\mathfrak{H}_G$ ノ完全正規直交系ヲ

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \cdots\cdots$$

トスレバ

$$u_a\cdot e_{A^{-1}}=\sum_{j=1}^{\infty}\left(u_a\cdot e_{A^{-1}},\ \varphi_j\right)\varphi_j\ ;$$

スナハチ

$$\lim_{n\to\infty}\left\| u_a \cdot e_{A^{-1}} - \sum_{j=1}^{n}(u_a \cdot e_{A^{-1}}, \varphi_j)\varphi_j \right\| = 0.$$

今簡単ノタメ

$$\sum_{j=1}^{n}(u_a \cdot e_{A^{-1}}, \varphi_j)\varphi_j(x) = S_n(u_a, x)$$

トオケバ，ソノ形カラ容易ニ分ル如ク，$S_n(u_a, x)$ ハ u_a ニツイテハ連続，a, x ニ変数ニツイテハ m-measurable ナル函数デアツテ，

$$\int_G |e_{A^{-1}}(a^{-1}x) - S_n(u_a, x)|^2 m(dx) \leqq \| e_{A^{-1}} \|^2$$

従ツテ，上ニ述ベタ如ク

$$\lim_{n\to\infty}\int_G |e_{A^{-1}}(a^{-1}x) - S_n(u_a, x)|^2 m(dx) = 0$$

デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma^{-1}(U)} m(da)\int_G |e_{A^{-1}}(a^{-1}x) - S_n(u_a, x)|^2 m(dx) = 0;$$

故ニ，$e_{A^{-1}}(a^{-1}x) = e_{x_A}(a)$ デアルカラ，Fubini ノ定理ニヨツテ

$$\lim_{n\to\infty}\int_G m(dx)\int_{\gamma^{-1}(U)} |e_{x_A}(a) - S_n(u_a, x)|^2 m(da) = 0.$$

従ツテ[37)]

---

37) Fatou ノ Lemma ニヨル. Saks: Theory of Integral P. 29. 参照.

$$\int_G m(dx)\lim_{n\to\infty}\int_{r^{-1}(\mathfrak{W})}|e_{xA}(a)-S_n(\mathcal{U}_a,x)|^2 m(da)=0;$$

故ニ，m-Maß 0 ノ x-Menge X_0 ヲ除ケバ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{r^{-1}(\mathfrak{W})}|e_{xA}(a)-S_n(\mathcal{U}_a,x)|^2 m(da)=0.$$

然ルニ，任意ノ開集合 $\mathfrak{W}$ ヲトッタトキ必ズ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{W}))>0$$

デアルカラ，[38] $x_1\notin X_0$ ヲ，$r(x_1)=\mathcal{U}_{x_1}$ ガ充分ニ近イ様ニ選ンデ

$$r(x_1A)=r(x_1)\,r(A)\subset\mathfrak{W},$$

ナラシメルコトガ出来ル．コノトキ，$t(\mathcal{U})$ $(\mathcal{U}\in\mathfrak{G})$ ヲ

$$0\leqq t(\mathcal{U})\leqq 1,\qquad t(\mathcal{U})=\begin{cases}1 & \mathcal{U}\in\overline{\mathfrak{W}}_1\text{ ノトキ}\\ 0 & \mathcal{U}\notin\mathfrak{W}\text{ ノトキ}\end{cases}$$

ナル連続函数トスレバ，明ラカニ

$$|e_{x_1A}(a)-S_n(\mathcal{U}_a,x_1)+(\mathcal{U}_a)|$$
$$=|e_{x_1A}(a)-S_n(\mathcal{U}_a,x_1)|+(\mathcal{U}_a)$$

デアッテ

$$t(\mathcal{U}_a)\leqq e_{r^{-1}(\mathfrak{W})}(a)$$

デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty}\int_G|e_{x_1A}(a)-S_n(\mathcal{U}_a,x_1)+(\mathcal{U}_a)|^2 m(da)=0.$$

---

38) 何トナレバ，$\mathfrak{G}$ ガ separabel デアルカラ，

$$\sum_{j=1}^{\infty}x_j\cdot r^{-1}(\mathfrak{W})=G$$

ナル $x_j\in G$ ガ存在スル．従ッテ $m(r^{-1}(\mathfrak{W}))>0$ デナケレバナラナイ．

従ツテ，今

$$\mathfrak{U}^{(n)} = (u;\ |1 - s_n(u, x_1) t(u)| < \tfrac{1}{2})$$

トオケバ明ヲカニ $\mathfrak{U}^{(n)}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ開集合デアッテ

$$\varliminf_{n\to\infty} d_m(x, A, r^{-1}(\mathfrak{U}^{(n)})) = 0^{39)}$$

故ニ

$$r(x_1^{-1}) \cdot \mathfrak{U}^{(n)} = \mathfrak{U}_1^{(n)}$$

トオケバ，m^* ガ linkes-invariant デアルカラ

$$\varliminf_{n\to\infty} d_m(A, r^{-1}(\mathfrak{U}_1^{(n)})) = 0$$

—— 一般ニ $A \in (m)$ ナルトキハ，

$$\overline{r(A_j)} \subset \mathfrak{U}_{1,j} \subset \overline{\mathfrak{U}}_{1,j} \subset \mathfrak{U}_j, \quad m(r^{-1}(\mathfrak{U}_j)) < +\infty,$$
$$m(A_j^{-1}) < +\infty$$

ナル m-meßbar ナ部分集合 $A_j \subset G$ ヲ適當ニ選ンデ

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$$

ト現ハスコトガ出来ル．故ニ上ニ証明シタ結果ニヨッテ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$d_m(A, r^{-1}(\mathfrak{U})) < \varepsilon$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ開集合 $\mathfrak{U}$ ガ存在スル。

—— 故ニ定理 14 ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ハ im Kleinen kompakt デアッテ m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß μ^* ニヨッテ induzie

---

39) 何トナレバ

$$d_m(x, A, r^{-1}(\mathfrak{U}^{(n)})) < \frac{1}{4}\int_G |e_{x,A}(a) - s_n(u_a, x_1) t(u_a)|^2 m(da).$$

ren サレタ Maß デアル:

$$m^* = m^*_\mu \qquad \text{(証明終)}$$

吾々ハ次ノ Nr 3 デ m^* ガ與ヘラレタトキ $m^* = m^*_\mu$ ナル μ^* ハ eindeutig ニ定マルコトヲ証明スル。

3. <u>Eindeutigkeitssatz</u>. G ヲ群, m^* ヲ G separabel ナ Weil ノ Maß トスル。コノトキ次ノ條件 1) 2) ヲ満たスル abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群 $\mathfrak{G}$ ハ eindeutig ニ定マル:

1) $G/N \subset \mathfrak{G}$.

2) m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß μ^* ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアル,

$$m^* = m^*_\mu .$$

証明. Isomorphiesatz ニヨレバ, $f(\xi) \to f r(x)$ ナル對應ニヨッテ $\mathfrak{H}^{(\mu)}_{\mathfrak{G}}$ ト $\mathfrak{H}^{(m_\mu)}_{G}$ ハ isomorph ニナル. ソコデ吾々ハ f ト $f r$ ヲ „identifizieren" シテ

$$f = f \cdot r, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(\mu)}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}^{(m_\mu)}_{G}$$

ト考ヘ, $\mathfrak{H}$ ノ unitärer Operator ノ作ル群ヲ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ トオク. Nr 2 ニ於ケルト同様ニ

$$U_x f(y) = f(x^{-1} y), \qquad U_\xi f(\eta) = f(\xi^{-1} \eta)$$

ニヨッテ U_x, U_ξ ヲ定義スレバ, $f = f \cdot r$ ナル Identifizierung ニヨッテ

$$U_x = U_{r(x)}$$

トナル。

然ルニ定理6ニヨレバ

$$\xi = U_\xi$$

ナル Identifizierung ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ 内ニ topologisch isomorph ニ einbetten セラレル。コノトキ $G/N \subset \mathfrak{G}$ ノ元 $r(x)$ ノ Einbettung ハ

$$r(x) = U_{r(x)} = U_x$$

デ與ヘラレ，$x \in G$ ト m^* ノミニヨッテ定マリ，$\mathfrak{G}$ ニ關係シナイ。G/N ハ $\mathfrak{G}$ デ überall dicht，從ッテ $\mathfrak{G}$ ハ vollständig デアルカラ，$\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ 内デ作ッタ G/N ノ abgeschlossene Hülle デアル：

$$\mathfrak{G} = \overline{G/N} \quad \text{in} \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$$

スナハチ $\mathfrak{G}$ ハ eindeutig ニ定マル。　　　（証明終）

コノ証明ニヨレバ；

Zusatz zum Eindeutigkeitssatz. $\mathfrak{G}$ ヲ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群，G ヲ $G/N \subset \mathfrak{G}$ ナル群トシ，m^* ヲ G ニ於ケル $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß トスル。コノトキ U_a ヲ

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \qquad f(x) \in \mathfrak{H}_G^{(m)}$$

デ定義サレタ $\mathfrak{H}_G^{(m)}$ ノ unitärer Operator トスレバ

$$N = (a;\ U_a = 1)$$

デアッテ，mod N ノ Restklasse $r(a)$ ト U_a ヲ identifizieren シテ

$$\gamma(a) = \mathfrak{U}_a, \quad G/N \subset \mathfrak{U}_{\mathfrak{F}_G}^{(m)}$$

ト考ヘルナラバ

$$\mathfrak{G} = \overline{G/N} \quad \text{in} \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{F}_G}^{(m)}$$

—— 逆ニ, Weil ノ定理ニヨレバ, G ニ於テ separabel ナル Weil ノ Maß m^* ガ與ヘラレタトキ

$$\mathfrak{G} = \overline{G/N} \quad \text{in} \quad \mathfrak{U}_{\mathfrak{F}_G}^{(m)}$$

トオケバ, $\mathfrak{G}$ ハ links-invariant ナ Metrik ヲ有スル separabel, im Kleinen kompakt ナ群デアッテ, m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアル。

§6. 群ノ Maß ト Metrik ノ關係

1. <u>對應定理</u>. m^* ヲ群 G ノ separabel ナル Weil ノ Maß トスレバ, Weil ノ定理ニヨッテ, Normalteiler N 及ビ $G/N \subset \mathfrak{G}$ ナル abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群 $\mathfrak{G}$ ガ存在シテ, m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ト一致スル. $\mathfrak{G}$ ハ links-invariant ナ Metrik ヲ有スル. コレヲ $\rho_{\mathfrak{G}}$ トシ,

$$\rho(x, y) = \rho_{\mathfrak{G}}(\gamma_N(x), \gamma_N(y)),^{40)} \quad x, y \in G$$

ニヨッテ $\rho(x, y)$ ヲ定義スレバ, ρ ハ G ノ links-invariant ナ „allgemeine" Metrik ト考ヘラレル. 吾々ハコヽデ,

---

40) $\gamma_N(x)$ ハ x ノ mod N ノ Restklasse デアル.
§3 Nr 2 參照.

カクノ如キ Metrik ト Weil ノ Map ノ関係ニツイテ考ヘテ見ルコトニショウ。

——先ヅ定義カラ始メル：

<u>定義</u>. 群 G ノ nicht-negativ ナ二変数ノ實函数 $\rho(x, y)$ が次ノ條件 1)—5) ヲ満足スルトキ，吾々ハ ρ ヲ G ノ t-Metrik トイフコトニスル：

1) $\rho(x, x) = 0$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqq \rho(x, z)$

4) ρ ハ links-invariant デアル：

$$\rho(zx, zy) = \rho(x, y)$$

5) $x_0, y_0 \ (\in G)$ 及ビ $\varepsilon > 0$ が任意ニ與ヘラレタトキ，$\delta > 0$ ヲ充分小サクトレバ，

$$\rho(x, x_0) < \delta, \quad \rho(y, y_0) < \delta \text{ ノトキ}$$

$$\rho(y^{-1}x, y_0^{-1}x_0) < \varepsilon.$$

t-Metrik ρ ニ於テハ一般ニ所謂 Trennungsaxiom:

(T) $\rho(x, y) = 0$ ナラバ $x = y$

ハ成立シナイケレドモ，形式的ニハ全ク同様ニ，ρ ニ基ヅイテ „offen", „abgeschlossen", „stetig" etc. ヲ考ヘルコトが出来ル。ρ ヲ明示スル必要がアル場合ニハコレヲ ρ-offen, ρ-abgeschlossen, ρ-stetig, etc. トイフコトニショウ。t-Metrik ノ定義ノ條件 5) ハスナハチ，x, y ノ Funktion $y^{-1}x$ が ρ-stetig デアルトイフコトニ他ナラナイ。[41] (脚註次頁ヘ)

ρ ガ G ノ t-Metrik ナルトキ,

$$N_\rho = (x;\ \rho(x, 1) = 0)$$

トオクコトニスレバ, N_ρ ハ G ノ Normalteiler デアッテ, $\rho(x, y)$ ハ mod N_ρ ノ Restklasse $r_{N_\rho}(x)$, $r_{N_\rho}(y)$ ノミニヨッテ定マル. コレヲ $r_{N_\rho}(x)$ ト $r_{N_\rho}(y)$ ノ距離ト考ヘ, 簡単ノタメ同ジ文字 ρ デ現ハスコトニスル:

$$\rho(r_{N_\rho}(x),\ r_{N_\rho}(y)) = \rho(x, y)$$

然ルトキハ G/N_ρ ハ ρ ヲ links-invariant ナ Metrik トスル topologische Gruppe デアッテ, G ノ開集合, 閉集合 etc. ハスナハチ夫々 G/N_ρ ノ開集合, 閉集合 etc. ノ r_{N_ρ}-Urbild ト一致スル ——.

<u>定義</u>. G ヲ群, m^* ヲ G ノ Weil ノ Maß, ρ ヲ G ノ t-Metrik トスル. コノトキ, m^* ト ρ ノ間ニ次ノ関係 1) 及ビ 2) ガ存在スルナラバ, ρ ハ m^* ニ属スル t-Metrik デアルトイフ:

1) G ノ ρ-offene Menge ハ m-meßbar デアル.

2) $A \in (m)$ ナルトキ, 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$d_m(A, U) < \varepsilon$$

ナル ρ-offene Menge U ガ存在スル.

然ルトキハ

<u>定理18</u>. G ヲ群, m^* ヲソノ Weil ノ Maß, ρ ヲ

---

4) コノトキ, $f(x)$ ガ ρ-stetig トスレバ, $\rho(x, y) = 0$ ナラバ $f(x) = f(y)$ デアル.

m^* = 属スル separabel ナ t-Metrik トスル。[42] コノトキ G/N_ρ ノ ρ-Komplettierung ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ[43]、$\mathfrak{G}$ ハ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群デアッテ、m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ト一致スル。$\mathfrak{U}_G$ ヲ $\mathfrak{H}_G^{(m)}$ ノ unitärer Operator 全体ノ作ル群、U_a ヲ

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \qquad f(x) \in \mathfrak{H}_G^{(m)}$$

ニヨッテ定義サレタ unitärer Operator トスレバ、

$$N_\rho = (a;\ U_a = 1)$$

デアッテ

$$r_{N_\rho}(a) \longrightarrow U_a$$

トル Abbildung ニヨッテ、ρ ヲ Metrik トスル群 G/N_ρ ハ $\mathfrak{U}_G$ 内ニ topologisch isomorph ニ einbetten セラレル。

---

42) G ガ ρ-separabel ナルトキ、吾々ハ ρ ハ separabel デアルトイフコトニスル。

43) 一般ニ metrischer Raum R ガ與ヘラレタトキ、R ニソノ Fundamentalfolge ノ limit ヲ附加ヘテ、vollständig ナ metrischer Raum $\overline{R}$ ニ拡張スルコトガ出来ル。吾々ハ van Dantzig ニ従ッテ、$\overline{R}$ ヲ R ノ Komplettierung トイフコトニスル。van Dantzig: Zur topologischen Algebra I; Math. Ann. 107 参照。—— 一般ニ、G ガ ρ ヲ linkes-invariant ナ Metrik トスル topologische Gruppe ナルトキハ、G ノ ρ-Komplettierung

(次頁へ)

証明. $\mathfrak{G}$ ハ ρ ヲ links-invariant ナ Metrik トスル separabel vollständig ナ topologische Gruppe デアッテ, G/N_ρ ハ $\mathfrak{G}$ デ überall dicht, G ノ ρ-offene Menge $\mathfrak{U}$ ハ, $\mathfrak{G}$ ノ offene Menge $\mathfrak{V}$ ノ r_{N_ρ}-Urbild $r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{V})$ ト一致スル. 従ッテ, ρ ハ $m^* =$ 属スル t-Metrik デアルカラ, G, N_ρ, m^*, $\mathfrak{G}$ ガ定理14 ノ條件 1) — 4) ヲ満足スルコトガ容易ニ確メラレル. 故ニ $\mathfrak{G}$ ハ im Kleinen kompakt, m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ト一致スル. 従ッテ, §5 Nr 3, Zusatz zum Eindeutigkeitssatz ニヨッテ.

$$N_\rho = (a;\ \mathfrak{U}_a = 1)$$

且ツ

$$r_{N_\rho}(a) \to \mathfrak{U}_a$$

ガ topologisch isomorph ナ Einbettung ナルコトガ分ル. (証明終)

(脚註43) ノツヾキ) 其ノ一

$\overline{G}$ モ亦 ρ ヲ links-invariant ナ Metrik トスル topologische Gruppe デアル. 何トナレバ: $\rho(x, y) = \rho(y^{-1}x, 1)$ デアルカラ, $(x_j) = (x_j;\ j = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ガ Fundamentalfolge デアルトイフコトハ $\lim x_j^{-1} x_k = 1$, 二ツノ Fundamentalfolge (x_j) ト (y_j) ガ äquivalent ナルコトハ $\lim y_j^{-1} x_j = 1$ デ現ハサレル. コノトキ:

補助定理 1. $\lim x_j^{-1} x_k = 1$, $\lim y_j = 1$ ナラバ $\lim x_j^{-1}\, y_j\, x_j = 1$. (次頁ヘツヾク)

最初ニ述ベタ如ク，G ニ separabel ナ Weil ノ Maß m^* ガ與ヘラレタトキ，m^* ニヨッテ定マル $G/N \subset \mathfrak{g}$ ナル separabel, im Kleinen kompakt ナ群 $\mathfrak{g}$ ノ links-invariant ナ Metrik $\rho_{\mathfrak{g}}$ ニヨッテ

$$\rho(x, y) = \rho_{\mathfrak{g}}(\gamma_N(x)\ \ \gamma_N(y)), \quad x, y \in G$$

ナル G ノ allgemeine Metrik ρ ガ定義サレル。ρ ハ明カニ G ノ separabel ナ t-Metrik デアッテ，m^* ハ $\mathfrak{g}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアルカラ，定理 13 ニヨッテ，ρ ハ m^* ニ屬スル。

(脚註 43) ノツヅキ) 其ノ二

證明．$\rho(x_j^{-1} y_j x_j, 1) = \rho(y_j x_j, x_j) \leqq \rho(x_j, x_k) + \rho(y_j x_k, x_k) + \rho(x_k, x_j)$ 故ニ k ヲ定メテオケバ $\lim\limits_j \rho(x_j^{-1} y_j x_j, 1) \leqq 2 \lim\limits_j \rho(x_j, x_k)$. k ハ任意デアルカラ，從ッテ $\lim\limits_j \rho(x_j^{-1} y_j x_j, 1) = 0$ q.e.d

コノ補助定理ハ，G ガ van Dantzig ノ所謂 Komplettierungs axiom ヲ満足スルコトヲ示ス。$\overline{G}$ ノ元 $\overline{x} = (x_j)$, $\overline{y} = (y_j)$ ニ対シテ $\overline{y}^{-1}\overline{x}$ ヲ

$$\overline{y}^{-1}\overline{x} = (y_j^{-1} x_j)$$

ト定義スレバ，$\overline{y}^{-1}\overline{x}$ ガ $\overline{x}, \overline{y}$ ニヨッテ eindeutig ニ定マッテ，$\overline{G}$ ガ群ニナルコトガ，コノ補助定理ニヨッテ容易ニ確メラレル。$\overline{G}$ ノ Metrik ρ ハ勿論

$$\rho(\overline{x}\ \ \overline{y}) = \lim_j \rho(x_j\ \ y_j)$$

デ定義サレル。コノ ρ ガ links-invariant ナルコトハ明白デアラウ。

(次頁ヘツヾク)

（脚註43）ノツヅキ）其ノ二

$\bar{G}$ ガ ρ ヲ Metrik トスル topologische Gruppe ナルコトヲ証明スルタメニ：

補助定理2. $\lim_N \rho(\bar{x}_N\,\bar{x}) = 0$ ナラバ $\lim_N \rho(\bar{x}_N\,\bar{y}, \bar{x}\,\bar{y}) = 0$

証明. $\lim_N \rho(\bar{x}_N\,\bar{y}, \bar{x}\,\bar{y}) \neq 0$ トスレバ，必要ガアレバ (N) カラ適当ナ部分列ヲ選ブコトニヨッテ，$\lim_N \rho(\bar{x}_N\,\bar{y}, \bar{x}\,\bar{y}) \geqq c > 0$ ト考ヘテヨイ。

$\bar{x} = (x_j)$ $\bar{y} = (y_j)$ $\bar{x}_N = (x_{Nj})$ トスレバ，従ッテ充分大ナルNニツイテハ，

$$\lim_j \rho(x_{Nj}\,y_j, x_j\,y_j) \geqq c' > 0;$$

従ッテ，Nニヨッテ定マル j_N ガアッテ

$$j > j_N \text{ ノトキ} \quad \rho(x_{Nj}\,y_j, x_j\,y_j) \geqq c'' > 0.$$

然ルニ $\lim_N \rho(\bar{x}_N\,\bar{x}) = 0$ デアルカラ，Nニ対シテ $k_N > j_N$ ヲ充分大キクトレバ

$$\lim_N \rho(x_{N k_N}\; x_{k_N}) = 0$$

スナハチ

$$\lim_N x_{k_N}^{-1}\, x_{N k_N} = 1$$

デアル。故ニ

$$\lim_N y_{k_N}^{-1}\, x_{k_N}^{-1}\, x_{N k_N}\, y_{k_N} = 1$$

コレハ

$$\rho(x_{N k_N}\, y_{k_N}, x_{k_N}\, y_{k_N}) \geqq c'' > 0$$

ニ反スル。（証明終）

コノ補助定理2ニヨッテ $\bar{y}^{-1}\bar{x}$ ノ連続性ガ次ノ様ニ証明サレル：

（次頁ヘツヅク）

然ルニ，定理 18 ニヨレバ，m^* ガ與ヘラレタトキ，コレニ屬スル ρ ハスベテ互ニ äquivalent デアッテ，[44)] 又逆ニ m^* ハ，ソレニ屬スル ρ ガ與ヘラレタトキ，multiplikativ ナ Konstant ヲ考ヘニ入レナケレバ eindeutig ニ定マル。何トナレバ，m^* ハ G/N_ρ ノ ρ-Komplettierung $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアッテ，Haar ノ Maß ハ multiplikativ ナ Konstant ヲ考ヘニ入レナケレバ，eindeutig ニ定マルカラデアル。故ニ

對應定理。群 G ニ於テ separabel ナ Weil ノ Maß m^* ガ與ヘラレタトキ，コレニ屬スル separabel ナ t-Metrik ρ ガ存在シテ，äquivalent ナモノヲ區別シナイコトニスレバ，eindeutig ニ定マル。逆ニ m^* ハ，コレニ屬スル ρ ガ與ヘラレタトキ，multiplikativ ナ Konstant ヲ考ヘニ入レナケレバ eindeutig

---

(脚註 43) ノツヾキ) 其ノ四

今，$\lim \rho(\bar{x}_N\ \bar{x})=0$，$\lim \rho(\bar{y}_N\ \bar{y})=0$ トスレバ

$$\rho(\bar{y}_N^{-1} x_N,\ \bar{y}^{-1}\bar{x}) \leqq \rho(\bar{y}_N^{-1}\bar{x}_N, \bar{y}_N^{-1}\bar{x}) + \rho(\bar{y}_N^{-1}\bar{x}, \bar{y}^{-1}\bar{x})$$
$$= \rho(\bar{x}_N, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{y}_N\bar{y}^{-1}\bar{x})$$

故ニ，補助定理 2 ニヨッテ

$$\lim (\bar{y}_N^{-1}\bar{x}_N,\ \bar{y}^{-1}\bar{x}) = 0$$

44) 一般ニ空間 R ノ二ツノ Metrik ρ_1，ρ_2 ガ R ノ同一ノ Topologie ヲ induzieren スルトキ，ρ_1 ト ρ_2 ハ äquivalent デアルトイフ。

ニ定マル。[45)]

2. "density" ノ理論. 所謂 "density" ニ関スル二三ノ定理ヲ述ベル. 先ヅ:

<u>定理19.</u> m^* ヲ G ノ separabel ナ Weil ノ Maß, ρ ヲ m^* ニ属スル t-Metrik トシ, V_j ($j=1,2,3,\cdots\cdots$) ヲ距離 ρ ニ関シテ単位元 1 ニ収斂スル[46)] m-meßbar ナ部分集合列,

$$m(V_j)>0$$

トスル. 然ルトキハ, 任意ノ m-meßbar ナ部分集合 A ガ與ヘラレタトキ, A ノ殆ンドスベテノ点 a ニ於テ[47)]

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\ \frac{m(aV_j\frown A)}{m(V_j)}=1$$

証明. $A=\sum A_N$ ノトキ各 A_N ニツイテ定理ガ成立ス

---

45) G ノ t-Metrik ρ ガ任意ニ與ヘラレタトキ, 一般ニハ, ρ ガ属スル Weil ノ Maß m^* ハ存在シナイ. 例ヘバ, G ヲ有理数全体ノ作ル加法群トシ, ρ ヲ $\rho(a,b)=|a-b|$ ト定義スレバ, ρ ガ属スル m^* ハ存在シナイ。

46) スナハチ, ε ニ対シテ j ヲ充分大キクトレバ

$$a\in V_j \text{ ノトキ } \rho(a,1)<\varepsilon$$

ト假定スルノデアル。

47) 一般ニ, アル性質 E が集合 A ノ高々 Maß 0 ノ点ヲ除イテ成立スルトキ, 吾々ハ A ノ殆ンドスベテノ点ニ於テ E デアルトイフ ——. コレハ実函数論ノ慣用語デアル。

レバAニツイテモ成立ツ．故ニ始メカラ

$$m(A^{-1})<+\infty$$

ト假定シテ差支ヘナイ．——

V_j ハ $j\to\infty$ ノトキ 1 ニ收斂スル．從ツテ，定理18ニヨツテ $a\to\mathfrak{U}_a$ ハ ρ-stetig デアルカラ，$\varepsilon>0$ ニ對シテ j ヲ充分大キクトレバ，$x\in V_j$ ノトキ，

$$\|\mathfrak{U}_x e_{A^{-1}}-e_{A^{-1}}\|^2<\varepsilon$$

トナル．ココニ $e_{A^{-1}}$ ハ A^{-1} ノ charakteristische Funktion デアル．スナハチ

$$\int_G \left| e_{A^{-1}}(x^{-1}a)-e_{A^{-1}}(a)\right| m(da)<\varepsilon;$$

從ツテ，$a\in A^{-1}$ ノトキハ $e_{A^{-1}}(a)=1$ デアルカラ，

$$\int_{A^{-1}}\left(1-e_{A^{-1}}(x^{-1}a)\right)m(da)<\varepsilon.$$

故ニ，コレヲ x ニツイテ V_j デ積分スレバ

$$\int_{V_j} m(dx)\int_{A^{-1}}\left(1-e_{A^{-1}}(x^{-1}a)\right)m(da)<\varepsilon\cdot m(V_j)$$

從ツテ

$$\int_{A^{-1}} m(da)\int_{V_j}\left(1-e_{aA}(x)\right)m(dx)<\varepsilon\cdot m(V_j),$$

或ハ

$$\int_{A^{-1}}\left(m(V_j)-m(V_j\frown aA)\right)m(da)<\varepsilon\cdot m(V_j).$$

コノ両辺ヲ $m(V_j)$ デ割レバ，

$$\int_{A^{-1}}\left(1-\frac{m(V_j \frown aA)}{m(V_j)}\right) m(da) < \varepsilon,$$

然ニ，$\varepsilon > 0$ ハ任意デアツタカラ

$$\lim_{j\to\infty}\int_{A^{-1}}\left(1-\frac{m(a^{-1}V_j \frown A)}{m(V_j)}\right) m(da) = 0$$

デアル、故ニ

$$\int_{A^{-1}}\underline{\lim}_{j\to\infty}\left(1-\frac{m(a^{-1}V_j \frown A)}{m(V_j)}\right) m(da) = 0,$$

従ツテ A^{-1} ノ Maß 0 ノ部分集合 A_0 ヲ除ケバ

$$\underline{\lim}_{j\to\infty}\left(1-\frac{m(a^{-1}V_j \frown A)}{m(V_j)}\right) = 0$$

デナケレバナラナイ。然ルニ $m(A_0)=0$ ノトキハ $m(A_0^{-1})=0$ デアツタ。

故ニ，A ノ殆ンドスベテノ点 a ニ於テ

$$\overline{\lim}_{j\to\infty}\frac{m(aV_j \frown A)}{m(V_j)} = 1 \qquad \text{（証明終）}$$

定理 20. （*Überdeckungssatz*） G ヲ群，m^* ヲソノ *links-invariant* ナル Maß，V_j $(j=1,2,3,\cdots\cdots)$ ヲ

$$0 < m(V_j) < +\infty$$

ナル *m-meßbar* ナ部分集合列トシ，任意ノ *m-meßbar* ナ A ガ與ヘラレタトキ，ソノ殆ンドスベテノ点 a ニ於テ

$$\overline{\lim}_{j\to\infty}\frac{m(aV_j \frown A)}{m(V_j)} = 1$$

ト假定スル。然ルトキハ，任意ノ有限ナ Mapヲモツ m-mepbar ナ集合 A，及ビ $\varepsilon>0$ ガ與ヘラレタトキ，適當ニ $a_N \in G$ $(N=1,2,\cdots\cdots)$ 及ビ V_{j_N} ヲ選ンデ

$$m\left(A-\sum_{N=1}^{\infty} a_N V_{j_N}\right)=0, \qquad \sum_{N=1}^{\infty} m(V_{j_N})<m(A)+\varepsilon$$

ナラシメルコトガ出來ル。

證明。 $\delta>0$ ヲ充分小サイ任意ノ正數トスル。一般ニ $m(A)>0$ ナルトキハ假定ニヨツテ

$$\frac{m(aV_j \frown A)}{m(V_j)}>1-\delta$$

ナル $a\in A$ 及ビ V_j ガ存在スル。カクノ如キ V_j ニツイテ $m(V_j)$ ノ上限ヲ考ヘ，コレヲ $\sigma(A)$ デ表ハスコトニスル：

$$\sigma(A)=\overline{\mathit{fin}}\ m(V_j),$$

然ルトキハ容易ニ分ル如ク $\sigma(A)>0$ デ

$$A\subset B \quad ナラバ \quad \sigma(A)\leqq\sigma(B).$$

——與ヘラレタ A ヲ A_0 トシ，$N=1,2,3,\cdots\cdots$ ニ對シテ，a_N，V_{j_N} 及ビ A_N ヲ順次ニ，

i) $m(a_N V_{j_N} \frown A_{N-1})>(1-\delta)\, m(V_{j_N})$

ii) $m(V_{j_N})>(1-\delta)\,\sigma(A_{N-1})$

iii) $A_N=A_{N-1}-a_N V_{j_N}$

ナル如ク定メテ行ク。コノコトハ $m(A_{N-1})>0$ ナル限リ常ニ可能デアル。コノトキ，i) ト iii) カラ直チニ分ル如ク

$$\sum_N m(V_{j_N})<\frac{1}{1-\delta}\, m(A)$$

從ッテ又 ii) ヨリ

$$\sum_{N} \sigma(A_{N-1}) < \frac{1}{(1-\delta)^2} m(A)$$

デアル。故ニ，或ル N_0 ニ於テ

$$m(A_{N_0}) = m\left(A - \sum_{N=1}^{N_0} a_N V_{j_N}\right) = 0$$

トナルカ，然ラザレバ

$$\lim_{N\to\infty} \sigma(A_N) = 0;$$

從ッテ，σ ハ單調デ，$m(B) > 0$ ナラバ $\sigma(B) > 0$ デアッタカラ

$$m\left(\prod_{N} A_N\right) = m\left(A - \sum_{N} a_N V_{j_N}\right) = 0$$

デナケレバナラナイ。而シテ，δ ヲ充分小サクトッテオケバ

$$\sum_{N} m(V_{j_N}) < \frac{1}{1-\delta} m(A) < m(A) + \varepsilon. \quad \text{(證明終)}$$

—— 以上ノ結果ヲ變形シテ，ρ ガ m^* ニ屬スルタメノ必要且ツ充分ナ條件ヲ與ヘルコトガ出來ル．スナハチ：

<u>定理 21</u>．G ヲ群，m^* ヲソノ separabel ナ Weil ノ Maß，ρ ヲ separabel ナ t-Metrik トスル．コノトキ ρ ガ m^* ニ屬スル Metrik ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ，次ノ 1)，及ビ 2) 又ハ 3) ガ成立スルコトデアル：

1) ρ ニ關シテ 1 ニ收斂スル m-meßbar ナ ρ-開集合列 U_j ($j = 1, 2, \ldots\ldots$) ガ存在スル．

2) A ガ m-meßbar ノトキ，A ノ殆ンドスベテノ點

a ニ於テ

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{m(a\mathfrak{U}_j \frown A)}{m(\mathfrak{U}_j)} = 1$$

3) $A \in (m)$ ナルトキ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $a_N, \mathfrak{U}_{j_N}$ ヲ適當ニ選ンデ

$$m(A - \sum_N a_N \mathfrak{U}_{j_N}) = 0.$$

$$\sum_N m(\mathfrak{U}_{j_N}) < m(A) + \varepsilon$$

ナラシメルコトが出來ル。

證明。必要ナコトハ既ニ證明シタ。2) が成立スレバ 3) が成立ツ。故ニ 1) 及ビ 3) が充分條件ナルコトヲ示セバヨイ。——ρ ハ separabel ダアルカラ，任意ノ ρ－開集合ハ $\sum_N a_N \mathfrak{U}_{j_N}$ ナル形ニ表ハサレル，從ツテ m-meßbar デアル。又 $A \in (m)$ ニ對シテ 3) ヲ滿足スル $a_N, \mathfrak{U}_{j_N}$ ヲ選ンデ

$$\mathfrak{U} = \sum_N a_N \mathfrak{U}_{j_N}$$

トオケバ，$\mathfrak{U}$ ハ ρ-offen デアッテ

$$d_m(A, \mathfrak{U}) = m(A - \mathfrak{U}) + m(\mathfrak{U} - A) < \varepsilon;$$

故ニ定義ニヨッテ ρ ハ m^* ニ屬スル。　(證明終)

3. Trennungsaxiom. m^* ヲ G ノ separabel ナ Weil ノ Maß，ρ ヲ m^* ニ屬スル t-Metrik トスル。ρ が今 Trennungsaxiom:

(T)　$\rho(x, y) = 0$ ナラバ $x = y$,

ヲ滿足スルモノト假定スレバ，G ハ ρ ヲ links-invariant ナ Metrik トスル topologische Gruppe，G ノ

Komplettierung $\mathfrak{G} \supset G$ ハ separabel, im Kleinen kompakt デアッテ, m^* ハ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß κ^* ニヨッテ

$$m^*(A) = \mu^*(A), \qquad A \subset G$$

ト現ハサレル。然ラバ ρ ガ (T) ヲ滿足スルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ何デアラウカ。コレヲ次ニ述ベヨウ。

<u>定理22.</u> m^* ヲ G ノ separabel ナ Weil ノ Maß, ρ ヲ m^* ニ屬スル t-Metrik トスル. コノトキ Trennungsaxiom:

(T) $\rho(x, y) = 0$ ナラバ $x = y$

ガ成立スルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, 次ノ性質 (T′) ヲ有スル (m) ノ可附番部分集合 $(\Lambda) = (\Lambda_j ; \Lambda_j \in (m), j = 1, 2, \text{-----})$ ガ存在スルコトデアル;

(T′) $x \neq y$ ナラバ $x \in \Lambda$, $y \notin \Lambda$ ナル $\Lambda \in (\Lambda)$ ガ存在スル。[48)]

証明. I) 必要ナル事. G ノ ρ-Komplettierung $\mathfrak{G}$ ハ abzählbare Basis ヲ有スル. コレヲ $(\mathfrak{U}_j ; j = 1, 2, 3, \text{-----})$ トシ

$$(\Lambda) = (G \cap \mathfrak{U}_j ; j = 1, 2, 3 \text{-----})$$

トオケバ, (Λ) ハ明ラカニ (T′) ヲ滿足スル.

II) 充分ナルコトノ証明.

---

48) Murray and Neumann: On Rings of Operators, Part IV; Annals of Math. vol. 37 參照.

$$N_\rho = (x;\ \rho(x,1)=0)$$

トオク．然ルトキハ m^* ハ定理18ニヨッテ G/N_ρ ノ ρ-Komplettierung $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアルカラ，$\Lambda_j \in (\Lambda)$ ニ對シテ

$$r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{a}_j) \supset \Lambda_j, \qquad m(r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{a}_j)-\Lambda_j)=0$$

ナル Borel set $\mathfrak{a}_j < \mathfrak{G}$，及ビ

$$r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{b}_j) \supset r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{a}_j)-\Lambda_j, \quad m(r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{b}_j))=0$$

ナル Borel set $\mathfrak{b}_j$ が存在スル．從ッテ

$$m\Big(\sum_j r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{b}_j)\Big)=0$$

デアルカラ

$$x \in G - \sum_j r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{b}_j)$$

ナル x が存在スル．今假ニ (T) が成立シナイト假定シテ見ヨウ．然ルトキハ

$$N_\rho \neq 1,$$

從ッテ

$$y \neq x, \qquad y \equiv x \ (\mathrm{mod}\ N_\rho)$$

ナル y が存在スル．從ッテ或 $\Lambda_j \in (\Lambda)$ が存在シテ

$$x \in \Lambda_j, \qquad y \notin \Lambda_j.$$

然ルニ

$$x \notin r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{b}_j)$$

デアッタカラ

$$x \in r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{a}_j) - r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{b}_j)$$

従ッテ

$$y \in r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{a}_j) - r_{N_\rho}^{-1}(\mathfrak{b}_j) \subset \Lambda_j$$

デナケレバナラナイ。コレハ矛盾デアル。　　　　（証明終）

§7. 應用ト例

1. *Map* ノ擴張。以上ノ結果ノ應用トシテ，*Map* ノ擴張ニツイテ考ヘテ見ヨウ。——— 一般ニ空間 R ノ二ツノ *Map* m_1^*，m_2^* ノ間ニ，

A ガ m_1-*meßbar* ナラバ m_2-*meßbar* デアッテ

$m_1(A) = m_2(A)$，

ナル関係ガアルトキ，m_2^* ハ m_1^* ノ拡張デアルト考ヘラレル。吾々ハ m_2^* ガ m_1^* ノ拡張デアルトイフコトヲ常ニカクノ如キ意味ニ解釋スルモノトスル———。

G ヲ群，m_N^*（N＝1, 2, etc.）ヲソノ *separabel* ナ *Weil* ノ *Map*，ρ_N ヲ m_N^* ニ屬スル *t-Metrik* トシ。簡單ノタメ

$$m_N(G) = 1$$

ト假定シヨウ。[49] 然ルトキハ

<u>定理 23.</u>　m_2^* ガ m_1^* ノ拡張ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ ρ_1 ガ ρ_2-*stetig* ナルコトデアル。[50]

証明。　m_2^* ガ m_1^* ノ拡張ナルトキハ明ラカニ

---

49)　$m_N(G) = +\infty$ ノ場合ニハ少シク複雑ナ現象ガ起ル。

50)　スナハチ，$\rho_2(x, x_0) \to 0$ ナラバ $\rho_1(x, x_0) \to 0$。

$$\mathfrak{y}_G^{(m_2)} \supset \mathfrak{y}_G^{(m_1)}$$

デアル．従ツテ定理18ニヨツテ ρ_1 ガ ρ_2-stetig ナルコトガ分ル。

逆ニ ρ_1 ガ ρ_2-stetig デアルト假定シテ見ヨウ．コノトキ

$$N_{\rho_1} = (x;\ \rho_1(x,1) = 0)$$

トオイテ，G/N_{ρ_1} ノ ρ_1-Komplettierung ヲ $\mathfrak{G}_1$，$\mathfrak{G}_1$ ノ Borel 集合ヲ $\mathfrak{B}_1$ デ現ハスコトニスレバ $\gamma_{N_{\rho_1}}^{-1}(\mathfrak{B}_1)$ ハ ρ_1-Borel 集合，従ツテ ρ_2-Borel 集合デアツテ，従ツテ m_2-meßbar デアル．今 $\mu = \mu(\mathfrak{B}_1)$ ヲ

$$\mu(\mathfrak{B}_1) = m_2(\gamma_{N_{\rho_1}}^{-1}(\mathfrak{B}_1))$$

ニヨツテ定義スレバ，容易ニ分ル如ク，μ ハ $(\mathfrak{B}_1)$ デ定義サレタ links-invariant, total additiv ナ集合函数デアツテ，

$$\mu(\mathfrak{G}_1) = 1;$$

従ツテ μ ニヨツテ定メラレル $\mathfrak{G}_1$ ノ Maß μ^* ハ Haar ノ Maß デアル．故ニ，m_1^* ハ μ^* ニヨツテ induzieren サレタ Maß デアルカラ，

$$\mu(\mathfrak{B}_1) = m_1(\gamma_{N_{\rho_1}}^{-1}(\mathfrak{B}_1));$$

従ツテ

$$B_1 = \gamma_{N_{\rho_1}}^{-1}(\mathfrak{B}_1)$$

トオクコトニスレバ

$$m_1(B_1) = m_2(B_1)$$

デアル。故ニ m_2^* ハ m_1^* ノ擴張デナケレバナラナイ。（證明終）

以下吾々ハ更ニ ρ_N ハ Trennungsaxiom (T) ヲ滿足スルモノト假定シヨウ。然ルトキハ，既ニ述ベタ如ク，m_N^* ハ G ノ ρ_N-Komplettierung $\mathfrak{G}_N$ ノ Haar ノ Maß μ_N^* ニヨッテ

$$m_N^*(A) = \mu_N^*(A)$$

ト現ハサレル。吾々ハ

$$m_N(G) = 1$$

ト假定シテヰル。從ッテ $\mathfrak{G}_N$ ハ kompakt デナケレバナラナイ。

既ニ述ベタ如ク

$$\mu_{N*}(\mathfrak{G}_N - G) = 0$$

デアルカラ，$G \neq \mathfrak{G}_N$ ナラバ G ハ μ_N-meßbar デナイ。[51]
從ッテ今 meßbar デナイ集合ヲ構成スルタメニハ必ズ超限歸納法ガ必要デアルコトヲ承認スルナラバ，Haar ノ Maß デナイ m_N^* ハ超限歸納法ヲ利用シナケレバ構成出來ナイコトニナル。

次ニ m_2^* ガ m_1^* ノ擴張デアルト假定シテ見ル。然ルトキハ，ρ_1 ハ ρ_2-stetig デアルカラ，$\xi_2 \in \mathfrak{G}_2$ ニ對シテ

$$\lim_j x^{(j)} = \xi_2 \quad \text{in } \mathfrak{G}_2, \quad x^{(j)} \in G$$

ナル $x^{(j)}$ ヲトレバ，$x^{(j)}$ ハ $\mathfrak{G}_1$ 内デ ξ_2 ノミニヨッテ定マル一定ノ ξ_1 ニ收斂スル。

$$\lim_j x^{(j)} = \xi_1 \quad \text{in } \mathfrak{G}_1$$

コノ ξ_1 ヲ

$$\xi_1 = s(\xi_2)$$

ト書クコトニスレバ，s ハ $\mathfrak{G}_2$ ヲ $\mathfrak{G}_1$ ニ abbilden スル連續ナ Abbildung デアッテ

$$x \in G \text{ ノトキ } \quad s(x) = x.$$

從ッテ，$\mathfrak{N}_2$ ヲ

$$\mathfrak{N}_2 = (\xi_2;\ s(\xi_2) = 1)$$

ト定義スレバ，$\mathfrak{N}_2$ ハ $\mathfrak{G}_2$ ノ abg. Normalteiler デアッテ

$$\mathfrak{G}_1 \cong \mathfrak{G}_2 / \mathfrak{N}_2.$$

コノトキ，又容易ニ分ル如ク

$$G \frown \mathfrak{N}_2 = 1$$

デアル。

故ニ，m_2^* ガ Haar ノ Maß，スナハチ $G = \mathfrak{G}_2$ ナルトキハ，$\mathfrak{N}_2 = 1$，$\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1$，從ッテ $m_2^* = m_1^*$ デナケレバナラナイ。Haar ノ Maß ハ如何ナル m_N^* ノ eigentlich ナ拡張デモアリ得ナイ。從ッテ或ル m_N^* ノ eigentlich ナ拡張ハ Haar ノ Maß デナイ。eigentlich ナ拡張ヲ構成スルタメニハ超限帰納法ヲ要スル。

2. 例1. $\mathfrak{R}$ ヲ有理數体，Γ ヲ實數体トシ，實數ヲ α, β, ξ, η etc.，平面 $\Gamma \times \Gamma$ ノ点ヲ (ξ, η) デ現ハスコトトシ，Γ ノ部分集合 (η) ガ與ヘラレタトキ，(η) デ erzeugen サレル $\mathfrak{R}$-Modul ヲ $\sum \mathfrak{R}\eta$ ト書クコトニスル。$\sum \mathfrak{R}\cdot\eta$ ハスナハチ

$$(r_1\eta_1+\cdots\cdots+r_n\eta_n;\ r_j\in\mathfrak{R},\ \eta_j\in(\eta))$$

デアルカラ，(η) が無限集合ナルトキハ，$\sum\mathfrak{R}\cdot\eta$ ノ濃度ハ(η) ノ濃度ニ等シイ。

平面 $\Gamma\times\Gamma$ ノ開集合ノ個数ハ連続ノ濃度ヲ越エナイ。従ッテ連続ノ濃度ヲ有スル最初ノ超限順序数ヲ Ω トスレバ，$\Gamma\times\Gamma$ ノ Map >0 ナスベテノ開集合ヲ，$N<\Omega$ ナル順序数 N ヲ Index トシテ

$$F_N \quad (1\leqq N<\Omega)$$

ト現ハスコトガ出来ル。コノトキ，σ ヲ $\sigma\leqq\Omega$ ナル任意ノ順序数トスレバ，$N<\sigma$ ナルスベテノ N ニ対シテ次ノ條件 1)—4) ヲ満足スル實數 ξ_N，η_N，β_N ヲ對應サセルコトガ出来ル：

1) $\xi_N=\eta_N\cdot i$

2) $(\xi_N,\ \eta_N)\in F_N$

3) $\mathfrak{R}\frown\sum\limits_{N<\sigma}\mathfrak{R}\eta_N=0$

4) $(\mathfrak{R}+\sum\limits_{N<\sigma}\mathfrak{R}\eta_N)\frown\sum\limits_{N<\sigma}\mathfrak{R}\beta_N=0$

コレヲ σ ニ関スル超限帰納法ニヨッテ証明スル。コノタメニ，$\sigma<\sigma_0$ ナルスベテノ σ ニツイテ既ニ証明サレタモノト假定シヨウ。σ_0 ガ孤立数ナルトキハ

$$\tau=\sigma_0-1$$

トオケバ，$N<\tau$ ナル N ニツイテハ既ニ ξ_N，η_N，β_N ガ構成サレテヰル。ξ_τ，η_τ，β_τ ヲ構成スルタメニ，F_τ ノ charakteristische Funktion ヲ e_{F_τ} トスレバ，假

定ニヨッテ

$$\int d\xi \int e_{F_\tau}(\xi, \eta)\, d\eta > 0$$

デアル。Mapン0 ナル mepbar ナ集合ハ連続ノ濃度ヲ有スル。然ルニ $\sigma_0 < \Omega$ デアルカラ

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{R} + \sum_{N<\tau} \mathfrak{R}\eta_N + \sum_{\nu<\tau} \mathfrak{R}\beta_N$$

トオケバ，$\mathfrak{M}$ ノ濃度ハ連続ノ濃度ヨリ小サイ。従ッテ

$$\xi_\tau \notin \mathfrak{M}, \quad \int e_{F_\tau}(\xi_\tau, \eta)\, d\eta > 0$$

ナル ξ_τ ガ存在スル。$\mathfrak{M} + \xi_\tau \mathfrak{R}$ ノ濃度モ亦連続ノ濃度ヨリ小サイ。従ッテ又

$$\eta_\tau \notin \mathfrak{M} + \xi_\tau \mathfrak{R}, \qquad e_{F_\tau}(\xi_\tau, \eta_\tau) = 1$$

ナル η_τ ガ存在スル。β_τ ヲ

$$\beta_\tau = \xi_\tau - \eta_\tau$$

ト定義スレバ，カク定メラレタ $\xi_\tau, \eta_\tau, \beta_\tau$ 及ビ $N < \tau$ ニ對スル ξ_N, η_N, β_N ガ σ_0 ニ対シテ條件 1) — 4) ヲ満足スルコトハ明白デアラウ。

σ_0 ガ極限數ナル場合ニハ，既ニスベテノ $N < \sigma_0$ ニ對シテ ξ_N, η_N, β_N ガ條件 1) — 4) ヲ満足スル様ニ定義サレテヰル ——。

特ニ $\sigma = \Omega$ トオケバ，スベテノ $N < \Omega$ ニ對シテ 1) — 4) ヲ満足スル ξ_N, η_N, β_N ガ存在スルコトガ分ル。ソコデ

$$Y = \sum_{N<\Omega} \mathfrak{R}\eta_N$$

トオキ，又

$$\mathrm{B} \supset \sum_{N<\Omega} \mathfrak{R}\beta_N$$

ナル $\mathfrak{R}$-Modul B ヲ適當ニ定メレバ，Γ ハ三ツノ Modul $\mathfrak{R}$, Y, B ノ direkte Summe トシテ現ハサレル:

$$\Gamma = \mathfrak{R} + \mathrm{Y} + \mathrm{B}.$$

從ッテ $\xi \in \Gamma$ ハ eindeutig ニ

$$\xi = \gamma_\xi + \eta_\xi + \beta_\xi, \qquad \gamma_\xi \in \mathfrak{R},\ \eta_\xi \in \mathrm{Y},\ \beta_\xi \in \mathrm{B}.$$

ト現ハサレ，ξ ニ對シテ

$$\xi^* = (\xi, \eta_\xi)$$

トオケバ，ξ^* ノ全体ハ Γ ニ isomorph ナ $\Gamma \times \Gamma$ ノ部分群 Γ^* ヲ作ル。

特ニ $\xi = \xi_N$ トオケバ

$$\xi_N^* = (\xi_N, \eta_N)$$

デアルカラ，Γ^* ハスベテノ Maß >0 ナ $\Gamma \times \Gamma$ ノ開集合 F_N ト共通点ヲ有スル。故ニ $\Gamma \times \Gamma - \Gamma^*$ ノ inneres Maß ハ 0 デナケレバナラナイ。從ッテ $\Gamma \times \Gamma$ ノ Lebesgue ノ Maß ニヨッテ Γ^* ノ separabel ナ Weil ノ Maß m^* ガ induzieren サレル。明ラカニ $\Gamma^* \neq \Gamma \times \Gamma$ デアルカラ，m^* ハ Haar ノ Maß デナイ。

例2. $\mathfrak{g}$ ヲ有理整數全体ノ作レ加法群トスレバ，

$$\mathrm{T} = \Gamma / \mathfrak{g}$$

ハスナハチ "Torus" 群デアル。T ノ Haar ノ Maß ヲ μ，invariant ナ Metrik ヲ ρ トシ，又簡單ノタメ T

ノ元ヲ Γ ト同ジ文字 ξ, η, etc. デ現ハスコトニシヨウ. 明ラカニ

$$\mathfrak{T}-\Gamma/\mathfrak{g}=\mathfrak{K}/\mathfrak{g}+\mathrm{Y}+\mathrm{B}$$

デアルカラ, $\xi\in\Gamma$ ニ對シテソノ Y-*Komponent* ヲ η_ξ ト書クコトニスレバ

$$\xi^*=(\xi,\ \eta_\xi)$$

ノ全体ハ $\mathfrak{T}$ ニ *isomorph* ナ $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$ ノ部分群 $\mathfrak{T}^*$ ヲ作リ,

$$\mu\mu_*(\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}-\mathfrak{T}^*)=0$$

デアル. 從ツテ $\mu\mu^*$ ニヨツテ $\mathfrak{T}\cong\mathfrak{T}^*$ ノ *separabel* ナ Weil ノ Maß m_2^* ガ *induzieren* サレル. m_2^* ニ屬スル *t-Metrik* ρ_2 ハ

$$\rho_2(\xi^*\ \xi_0^*)=\sqrt{\rho(\xi\ \xi_0)^2+\rho(\eta_\xi,\ \eta_{\xi_0})^2}$$

デ與ヘラレル. 明ラカニ ρ ハ ρ_2-*stetig* デアル. 故ニ

$$\mu(\mathfrak{T})=m_2(\mathfrak{T})=1$$

デアルカラ, 定理23ニヨツテ, m_2^* ハ μ^* ノ擴張, 而モ *eigentlich* ナル擴張デアル.

——（終）——