773. 可附番無限個ノ可能ナ狀態ニ關スル Markoff 過程ニ就イテ I

角谷 靜夫 (阪大)

可附番無限個ノ可能ナ狀態 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ヲ持ツ homogeneous simple ナ Markoff process ヲ考ヘル。x_i ニアツタ点ガ單位時間後ニ x_j ニ移ル probability ヲ p_{ij} ニテ表ハセバ

$$0 \leqq p_{ij} \leqq 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

デアル。x_i ニアツタ点ガ n 單位時間後ニ x_j ニ移ル probability $p_{ij}^{(n)}$ ハ

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}, \quad n = 2, 3, \cdots\cdots, \quad p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

ニヨッテ與ヘラレル。吉田氏ハ172号及ビ173号ニ於テ、コノ様ナ Markoff process ヲ論ジラレタ．吉田氏ハ先ヅ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}p_{ij}^{(m)}=P_{ij}$$

ノ存在ヲ証明シ、コノ極限 P_{ij} ヲ使ッテ全体ノ状態 $\mathcal{R}=(x_1, x_2, \text{-----})$ ヲ dissipative ナ部分 $\mathfrak{D}$ ト ergodic ナ部分 $\mathcal{E}_\alpha$ ト二分割サレタ．更ニ又各々ノ ergodic ナ部分ニ於テハ $p_{ij}^{(n)}$ ノ $n\to\infty$ ナルトキノ状態ガ詳シク調ベラレ、$p_{ij}^{(n)}$ ガ $n\to\infty$ ナルトキ収斂スルカ、又ハ週期的ニ振動スルコトガワカッテキル．コノ $P_{ij}^{(n)}$ ノ状態ヲ調ベルニ當ッテ中心トナッタノハ次ノ定理デアッタ。

定理　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ii}^{(m)}=P_{ii}>0$ ニテ且 $p_{ii}^{(n)}>0$ ナル positive integer n 全体ノ集合 $\mathfrak{N}$ ノ最大公約數ガ1ナラバ $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=P_{ii}$ ガ存在スル。

コノ定理ノ証明ニ當ッテハ先ヅ $\varliminf\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}>0$ ナルコトヲ証明スルコトガ必要デ $\varliminf\limits_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}>0$ トナルコトハ additive number theory ノ Khintchine ノ定理ヲ使ッテハジメテ証明サレタノデアッタ。（173号ノ談話76ヲ参照）．　本談話ニ於テハ先ヅ

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_{ii}^{(n)}=P_{ii}$ ノ存在ヲ吉田氏ト異ッタ方法デ証

明シ、次ニコノ証明ニ於テ副産物トシテ得ラレル結果ヲ使ッテ $p_{ii}>0$ ナルトキ $\varliminf_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}>0$ トナルコトヲ Khintchine ノ定理ヲ用ヒズニ証明スル。

先ヅ $k_{ij}^{(n)}$ ヲ定義スル。最初ニ x_i ニアッタ点ガ 1, 2, -----, $n-1$ 単位時間後ニハ x_j ニハ行カズニ、n 単位時間後ニ始メテ x_j ニ移ル probability ヲ $k_{ij}^{(n)}$ ニヨッテ表ハス、明カニ

$$0 \leqq k_{ij}^{(n)} \leqq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_{ij}^{(n)} \leqq 1$$

デアル。又

$$p_{ij}^{(n)} = k_{ij}^{(n)} + k_{ij}^{(n-1)} p_{jj}^{(1)} + k_{ij}^{(n-2)} p_{jj}^{(2)} + \cdots\cdots + k_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)}$$

ガ成立スルコトモ明カデアル。次ニ特ニ $i=j$ ナルトキヲ考ヘレバ $k_{ii}^{(n)}$ ハ最初ニ x_i ニアッタ点ガ n 単位時間後ニ始メテ x_i ニ戻ッテ来ル probability デアッテ

$$(1) \quad 0 \leqq k_{ii}^{(n)} \leqq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} k_{ii}^{(n)} \leqq 1$$

$$(2) \quad p_{ii}^{(n)} = k_{ii}^{(n)} + k_{ii}^{(n-1)} p_{ii}^{(1)} + k_{ii}^{(n-2)} p_{ii}^{(2)} + \cdots\cdots + k_{ii}^{(1)} p_{ii}^{(n-1)}$$

ガ成立スル。ココデ重要ナコトハ $\{k_{ii}^{(n)}\}$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots$; i ハ固定) ヲ任意ニ (1) ヲ満足スルヤウニ與ヘレバ, (2) ニヨッテ $\{p_{ii}^{(n)}\}$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) ガ一意的ニ決定サレテシマフコトデアル。

シカモ、一ツノ i ダケヲ考ヘレバ此ノ如クシテ定マッタ

$\{p_{i_0 i_0}^{(n)}\}$ ガ実際ノ $\{p_{i_0 i_0}^{(n)}\}$ ニモツヤウナ Markoff process $\{p_{ij}\}$ $(i, j=1, 2, \cdots\cdots)$ ガ存在スルコトデアル。即チ、任意ニ $\{k_{11}^{(n)}\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ $0 \leqq k_{11}^{(n)} \leqq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)} \leqq 1$ ナル如ク定メテ、コレヨリ $p_{11}^{(n)}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ順次

$$p_{11}^{(1)}=k_{11}^{(1)}, \quad p_{11}^{(n)}=k_{11}^{(n)}+k_{11}^{(n-1)}p_{11}^{(1)}+k_{11}^{(n-2)}p_{11}^{(2)}+\cdots\cdots+k_{11}^{(1)}p_{11}^{(n-1)}$$

ニヨッテ定義スレバ、コノ $\{p_{11}^{(n)}\}$ ヲ実際ノ $\{p_{11}^{(n)}\}$ ニ持ツヤウナ Markoff process $\{p_{ij}\}$ $(i, j=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ作ルコトガ出来ル。

コノタメニハ Matrix $\{p_{ij}\}$ $(i, j=1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ次ノ如ク作レバヨイ:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)}=1$ ナルトキ.

$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ ヲ suffix ヲツケカヘテ $x_1, x_2, x_{3_1}, x_{3_2}, x_{4_1}, x_{4_2}, x_{4_3}, \cdots\cdots, x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\cdots, x_{n_{n-1}}, \cdots\cdots$ トオキ

$$p_{11}=k_{11}^{(1)}, \quad p_{12}=k_{12}^{(1)}, \quad p_{13_1}=k_{13}^{(1)}, \quad p_{13_2}=0,$$

$$p_{14_1}=k_{11}^{(4)}, \quad p_{14_2}=p_{14_3}=0, \cdots\cdots, p_{1n_1}=k_{11}^{(n)}, \quad p_{1n_2}=p_{1n_3}=\cdots\cdots=p_{1n_{n-1}}=0, \cdots\cdots;$$

$$p_{21}=1; \quad p_{2i}=0, \quad i \neq 1;$$

$p_{3_1 3_2}=1;\quad p_{3_1 i}=0,\quad i\neq 3_2;$

$p_{3_2 1}=1;\quad p_{3_2 i}=0,\quad i\neq 1;$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$p_{n_k n_{k+1}}=1;\quad p_{n_k i}=0,\quad i\neq n_{k+1};\quad k=1,2,\dots\dots,n-2.$

$p_{n_{n-1} 1}=1;\quad p_{n_{n-1} i}=0,\quad i\neq 1.$

- - - - - - - - - - - - - - - -

大分suffixガ面倒デアルガコレハ次ノ圖ニヨル方ガワカリヤスイデアロウ。

$$
(p_{ij}) = \begin{pmatrix}
k_{11}^{(1)} & k_{11}^{(2)} & k_{11}^{(3)} & 0 & k_{11}^{(4)} & 0 & 0 & k_{11}^{(5)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{11}^{(n)} & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0}^{(n-2)\text{個}}} & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

$(n-1)$個

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)} < 1$ ナルトキ

$k_{11}^{(\infty)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} k_{11}^{(n)}$ トオキ行列共ニ $\omega + \omega$ ナル type ノ Matrix (p_{ij}) ヲ次ノ如ク定義スレバヨイ。

$$(p_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\boxed{\quad \mathbb{K} \quad}}^{\omega} & \begin{matrix} k_{11}^{(\infty)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \end{array} \right)$$

但シ $\mathbb{K}$ ハ (i) ノ場合ニテ作ッタ Matrix (p_{ij}) デアル。

此ノ如クシテ作ッタ Matrix ガ所要ノモノデアルコトハ容易ニ験証サレル。

此ノ如クシテ $\{k_{11}^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ (i) ノ條件ダケデ、其ノ他ハ全ク自由ニ與ヘラレルコトガワカッタ。コレハ非常ニ面白イコトト思ハレル。$\{p_{11}^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ノ方デハ $0 \leqq p_{11}^{(n)} \leqq 1$ ノ他ニ $p_{11}^{(m+n)} \geqq p_{11}^{(m)} p_{11}^{(n)}$ ノ如キ條件ガ必要デアルガ、コノ條件ダケデハ $\{p_{11}^{(n)}\}$ ヲ自由ニ定メルト云フコトハ出來ナイノデアル。（即チ $\{p_{11}^{(n)}\}$ ガ満足スベキ必要且ツ十分ナ條件ハ簡単ナ形デ求メルコトガ困難

デアル.)。又、可能ナ状態ガ有限デアルトキニハ $\{k_{11}^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ自由ニ與ヘラレヌコトハ勿論デアル。

ヨッテ我々ノ問題ハ、形式上 *Markoff chain* ヲ離レテ、次ノ如ク *formulate* スルコトガ出來ル:

> $0\leqq k_n\leqq 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n\leqq 1$ ナル實數ノ系列 $\{k_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ與ヘラレタトキ、コレヨリ
>
> (3) $p_1=k_1$, $p_n=k_n+k_{n-1}p_1+k_{n-2}p_2+\cdots\cdots+k_1p_{n-1}$.
>
> $n=2,3,\cdots\cdots$
>
> ニヨッテ $\{p_n\}$ $(n=1.2,\cdots\cdots)$ ヲ定義スル. p_n ハ明カニ
>
> $$0\leqq p_n\leqq 1,\quad n=1,2,\cdots\cdots$$
>
> ヲ滿足スル. コレダケノ條件ノ下デ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}p_m=P$ ガ存在スルコト及ビ $P>0$ ニテシカモ $k_n>0$ ナル integer n ノ集合 $\mathfrak{M}$ 最大公約數 $=1$ ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=P$ ガ存在スルコトヲ證明セヨ。