771. 大數ノ法則, VI

北川　敏男（阪大）

§6. I—V ノ総括:　本誌第167号ヨリ第171号マデ、述べ來タ所ヲ茲ニ総括シテ整理シテ置カウ。

相互ニ独立ナ確率変数ノ級數ヲ独立級數，必ズシモ然ラザル即チ一般ノ確率変数ノ級數ヲ聯鎖級數ト吾々ハ略称シタ。從ツテ独立級数ハ聯鎖級數ノ特別ノ場合デアル。

相互ニ独立ナ確率変数ノ級数ニ関シテハ，近年著シイ研究ノ進展ヲ見タ。吾々ハ聯鎖級數ニ関スル反復對數ノ法則ヲ目標トシテ進ンデ来タノデアルガ、ソノ方法トシテハ，相互ニ独立ナ確率変數ノ級数ノ諸定理ヲ樹テルタメニ用ヒタ方法ヲ拡張シ、コレラ諸定理ニ於ケル確率変数ノ相互ニ独立トイフコトヲ、モット緩イ條件デ置キ換ヘルコトニヨリ、聯鎖級數ニ関スル諸定理ヲツクッテ行クトイフ方針デ進ンデ來タ。

独立級数ニ関スル研究手段トシテ次ノ五ツノ方法ガアル。

〔1〕　標準偏差ノ和ニ着目スル方法

〔2〕　散縮度増加ノ原理ヲ利用スル方法

〔3〕　*Kolmogoroff* ノ不等式ヲ利用スル方法

〔4〕　特性函数ノ乘積ノ問題ヘ変換スル方法

〔5〕′　独立函數ノ方法

ヲ挙ゲルコトガ出来ル。吾々ハ〔1〕—〔4〕ニツイテハ，コレ

等ヲ、如何ニシテ聯鎖級數ヘ拡張スベキカヲ述べタ。（I—II）

茲デ注意シテ置キタイコトハ，〔1〕ト〔3〕トハ同ジ項ニ入レタ方ガ或ハ宜カッタカモ知レヌト云フコトゝ，〔2〕ニ関シテハ最近 *Lévy* ニヨリ、更ニ研究ガ続ケラレテ居ルコトトデアル。〔5〕′ニ関シテハ，コゝデハ述べナカッタガ将来性ハ期待セラレル。

サテ、吾々ガ、ソレラヲ聯鎖級數ニ関スル定理ヘマデ拡張セントシテ研究ノ對象ニ取リ上ゲタ独立級數ノ定理ハ、今マデノトコロ次ノ三ツデアッタ。

定理A.（*Liapounoff*）（III，第169号，p.674）

定理B.（*Kolmogoroff*）（V，第171号，p.742）

定理C.（*Lévy*）（V，第171号，p.747）

以下、上述ノ方針ノモトデ得ラレタ諸結果ヲ、定理A, B, Cト共ニ再記シヨウ。再記トイッテモ、総括對照ノ便宜上、記述ノ形式ヲ必要ニ應ジテ変更スルコトモアロウ。但シI—Vマデト同じ番号デ記述スルモノハ夫々、同一内容デアルカ或ハ，証明中ニソレト同一内容ノコトガ得ラレテ居ルコトヲ意味スル。尚証明ノ道筋ヲモ所々、回顧スル事ニシヨウ。

先ヅ記號上ノ規約：

(α) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{\nu-1}$ ガ知ラレタモノトシテ計算セラレタ X_ν ノ平均値ヲ $E_{\nu-1}\{X_\nu\}$ デ示ス。

(β) $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ （*gauss* ノ分布）

(γ) $S_n = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$

吾々ハ次ノ定理A_0ノ擴張トシテ先ヅ定理3ヲ得タ。

條件 \ 屬性	定理A_0（獨立級數）	定理3（聯鎖級數）
假設	(1°) $E\{X_\nu\}=0$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$	(C) $E_{\nu-1}\{X_\nu\}=0$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$
	(2°) $E\{X_\nu^2\}\equiv\sigma_\nu^2<\infty$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$	(C_1) $\sigma_\nu^2\equiv E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}=E\{X_\nu^2\}<\infty$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$
	(3°) $\lvert X_\nu\rvert<\varepsilon b_n$ $(\nu=1,2,\cdots,n)$ 但 $b_n^2\equiv\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2$	(C') $\lvert X_\nu\rvert<\varepsilon b_n$ $(\nu=1,2,\cdots,n)$ 但 $b_n^2\equiv\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2$
結論	$\left\lvert \Pr\left\{\dfrac{S_n}{b_n}<x\right\}-\Phi(x)\right\rvert<6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$（スベテノ實數$x$ニ對シテ）	

茲ニ云フマデモナク、(C_1)ハ，$E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}=E\{X_\nu^2\}$トイフ假定ト，$E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}<\infty$トイフ假定ト，二ツカラナッテ居ル。（$\equiv$ハ定義式ノ意）

定理3ノ證明ハ，III（第169号、p. 675—680）デ述ベタ。ソノ骨子ハ分布函數ノ Faltungsrelation ヲ立チ入ッテ調ベタモノデアッテ方法〔1〕ニ屬スル。サテ、吾々ハ條件(C_1)ヲ除去スルコトニ、次ノ拡張ノ方向ヲトッタ。即チ$\sigma_\nu\equiv E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}$ナルモノハ，$E\{X_\nu^2\}$ニ等シイトイフ假定ヲ捨テル，ソノタメニ、ソレハ常數ニアラズシテ一般ニ、確率変数トシテ取扱フ必要ヲ生ジタ。$b_n^2\equiv\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2$ハ，コノトキ確率変数デアルカラ、$(C')$ナル式ハ，コノ場合意味ガナイ。

ソコデ、Lévy ニ從ヒ，聯鎖級數ノ和 $X_1+X_2+\cdots$

$\cdots\cdots + X_n$ ノ代リニ、各正ノ実数 t ニ對シテ定義セラレル所ノ t ニ於ケル切断ナル概念 $S(t)$ ヲ導入シタ、(IV, 第170, p. 125)、コレニ由レバ

<table><tr><td>

定理4. 聯鎖級数ニ関スル定理3ニ於テ條件 (C_1) 及ビ (C') ヲバ次ノ條件デ与ヘテモ定理3ノ結論ハ成立ツ;

(C_2) $S(t)$ ノ各項ガ絶對値ニ於テ $\varepsilon\sqrt{t}$ ヲ超ヘナイ。

</td></tr></table>

以上ヲ整理スルト: 三定理ノ相互関係並ビニ、拡張ノ要点ハ、次ノ表デ標記的ニ示サレタリ。

定理 A_0 ⊂ 定理3 ⊂ 定理4	
独立性ノ除去	(C_1), (C') ノ除去

次ニ、吾々ハ更ニ進ンデ定理5, 6ヲ述ベタ。コレハ、要スルニ、定理4ハ未ダ補助定理デアッテ、有限個ノ確率変数ニ関スル結果デアルカラ、上述ノ n ヲ ∞ ニ、或ハ $S(t)$ ニテ t ヲ ∞ ニマデナシタ場合ノ結果ヲ形成シナケレバナラヌ、ソレヲ実行シタノガ定理5, 6デアル。

独立級数ニ関スル定理 A_0 カラハ、直チニ、

<table><tr><td>

定理A. 独立系列 $\{X_\nu\}$ ニ於テ

(1°) $E\{X_\nu\} = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$

(2°) $E\{X_\nu^2\} \equiv \sigma_\nu^2 < \infty$

</td></tr></table>

(3°₁) $|X_\nu| < k \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots,)$ 有界

(3°₂) $b_n^2 \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots\cdots + \sigma_n^2 \longrightarrow \infty \ (n \to \infty)$ ナルトキニハ、

$\lim_{n\to\infty} \Pr.\left\{ \frac{S_n}{b_n} < x \right\} = \Phi(x)$ ガスベテノ實數

xニ對シテ成立ツ。

ナル結果ヲ得ラレルノニ對シ，定理4ノ無限個ノ確率変数列ヘノ拡張ニ當ツテハ若干ノ困難ガ存在スル。ソレハ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu^2$ ハ確率変数列デアルカラデアル。コノ間ノ事情ニ關シテハ、定理5ノ敍述ニ於テ假定(ii)ノ存在、假定(iii)ノ敍述ノ複雑ガ、コヽカラ生ズルコトヲ附言シタイノデアル。定理5ト定理6デアル。定理Aノ拡張トシテ得タ最良ノ結果ハ定理6デアル。

定理6　聯鎖系列 $\{X_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ニ於テ

(1°) $E_{\nu-1}\{X_\nu\} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(2°) $\sigma_\nu^2 \equiv E_{\nu-1}\{X_\nu^2\}$ トオクトキ，聯鎖確率変数列 $\{\sigma_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ニ於テ、$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_{\nu,0}^2 = \infty$ トナルヤウナ $\sigma_\nu = \sigma_{\nu,0}$ ナル数列 $\{\sigma_{\nu,0}\}$ ニ對シテハ，$n(t)$ ヲバ，$\sigma_{1,0}^2 + \sigma_{2,0}^2 + \cdots\cdots + \sigma_{n,0}^2 \geqq t$ ヲ満足スル最小ノ自然数トスルトキ、次ノヤウナ t ノ函数 $\varepsilon(t)$ ヲバ，$\{\sigma_{\nu,0}\}$ ニ從屬シテ撰ブコトガ出來ル：

(i) $|X_\nu| < \varepsilon(t)\sqrt{t} \quad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, n(t))$

(ii) $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$

然ルトキニハ

$$\lim_{t\to\infty} Pr.\left\{H_t, \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x\right\} = \beta\,\Phi(x)$$

ガスベテノ実数 x ニ對シテ成立ツ。但シ $\sum \sigma_\nu^2$ ガ發散スル確率ヲ β トシ，H_t ハ，t ニ對シテ $S(t)$ ガ定義サレル事象ヲ意味スル。

注意：$\beta=1$ ナラバ，定理6カラ定理5ガ得ラレル、コノトキニハ、

$Pr.\{H_t\}=1$，從ツテ $Pr.\left\{H_t, \frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x\right\} = Pr.\left\{\frac{S(t)}{\sqrt{t}} < x\right\}$ トナル。

定理 A ニ關スル今マデノ結果ハ以上ノ如クデアル。

次ニ定理 B[(1)] ニ移ル。コレニ對應スル結果トシテ得タ定理7ハ次ノ關係ニアル：

内容＼依據	定理B（独立級数）		定理7（聯鎖級数）	
假設	(1°) $E\{X_\nu\}=0$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$		(C) $E_{\nu-1}\{X_\nu\}=0$ $(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$	
	(2°) $\sigma_\nu^2=E\{X_\nu^2\}<\infty$ $(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$		(G) $\lvert X_\nu\rvert < k$（常数） $(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$	
結論	$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu^2=\infty$ ノトキ $\sum_{\nu=1}^{\infty}X_\nu$ ノ收斂スル確率ハ0	$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_\nu^2<\infty$ ノトキ $\sum_{\nu=1}^{\infty}X_\nu$ ノ發散スル確率ハ0	$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_k^2$ ガ發散シ且ツ $\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ ガ收斂スル確率ハ0	$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma_k^2$ ガ收斂シ且ツ $\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ ガ發散スル確率ハ0

(1) 第171号，p.742 定理B ノ敍述ニ於テ、σ_k トアルノハ，スベテ σ_k^2 ノ誤記デアリマス。

條件(3°)ハ條件(2°)ヲ含マナイカラ、定理7ハ定理Bノ擴張デアルト云ヒ得ナイ。

茲デ注意スベキコトハ、独立級数ニ関スル限リニ於テハ、ソノ收斂スル確率ハ0カ1カ何レカデアッテ、ソノ他ノ$0<\alpha<1$ナルαニナルコトハナイ。

從ッテ、$\sum X_\nu$ノ收斂スル確率ガ0カ、発散スル確率ガ0カ、コノ二ツノ場合ノ必ズ何レカ一方ガ起コル。シカラバ、$\sum \sigma_k^2 \gtrless \infty$ニヨッテ、ソレガ特徴付ケラレルトモ云ヒ得ル。然シ、σ_k^2ナルモノガ存在セヌトキニハ如何。コノトキニハ、コノ方法即チ[1]標準偏差ノ和ニ着目スル方法ハ新鋭[2]デオキカヘラレルコトハ良ク知ラレタコトデアル。聯鎖系ノ場合ニモソレニ相當シタコトヲ行ッテ、定理7(コレハ前述ノ如ク未ダ定理Bノ拡張ニスラナッテ居ナイ!)ノ拡張ヲ試ミントスルニハ、[2]ノ方法ヲ、聯鎖級数ニツイテ発展サセテ置ク必要ガアロウ。

次ニ定理Cニ移ル。

定理C(第171号, p.747)ガ独立系列ニ関スル中心極限定理トシテ、独立系列ニ関スル決定的ナ一ツノ結果デアルコトハ良ク知ラレタコトデアル。ソレハ、必充條件ヲ主張スルモノデアル。コレニ対シテ、定理Cノ條件ノ充分デアルトイフ半面ノ結果ニ對應スルモノトシテ、定理8ヲ挙ゲタ。不幸ニシテ、定理8ハ問題ノ半面ノ拡張トマデハナッテ居ラナイ。ソコニ改良ノ餘地ガアル。但シ、次ノコトハ云ヘルノデアル。即チ或ル事情ノモトニ於テハ、定理8ノ條件ハ又一

ツノ必要條件デアルト云フ事デアル。コヽカラ又筆ヲ進メテ行クコトニシヨウ。