761. Nesbitt ノ論文ニツイテ 1939

森田 紀一（東京文理大）

A/K ヲ主單位元ヲモツ K ノ上ノ多元環トスル。$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$ ヲ K ニ於ケル A ノ表現トシ、之レ等ノ表現ニ際シテ A ノ元 α ニ對應スル行列ヲ $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ トスル。

$$B(\alpha)P = PC(\alpha) \quad \text{for all } \alpha \in A$$

ヲ滿足スル如キ一次獨立ナル行列ガ丁度 h 箇アルトキ h ヲ

$$h = I(\mathfrak{L}, \mathfrak{C})$$

ナル記号デ表ハス。（Nesbitt: On the regular representations of algebras, Ann. of Math 39. NO. 3 (1938)）

然ラバ $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$ ノ左表現加群ヲ夫々 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ トスルトキ、$\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ中ヘ A ヲ作用環トシテ、作用準同型ニ寫ス寫像ト上式ヲ滿足スル行列 P トノ間ニ一對一ノ對應ガ存スルコトハヨク知ラレテヰル。從ツテ h ハ、カヽル準同型寫像ノ作ル K 加群ノ K ニ對スル階級ニ等シイ。（右表現加群ヲ考ヘルトキハ、$\mathfrak{L}$ ノ右表現加群ヲ $\mathfrak{C}$ ノ右表現加群ノ中ヘウツス作用準同型寫像ノ作ル加群ノ階級ガ h デアル）然ラバ

補助定理 1. e ヲ A ノ巾等元トスルトキ、Ae, eA ヲ夫々左, 右表現加群ト考ヘテ得ラレル A ノ表現ヲ $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}^*$ トスル。別ニ A ノ一ツノ表現 $\mathfrak{L}$ ニ際シテ e ガ行列 $B(e)=$

対應スルモノトスル。然ラバ

$$I(\mathfrak{L}, \vartheta) = I(\vartheta^*, \mathfrak{L}) = \text{rank of } B(e)$$

証明. $\mathfrak{L}$ ノ左表現加群ヲ $\mathfrak{M} = v_1K + \cdots\cdots + v_mK$ トスル. Ae ヲ $\mathfrak{M}$ ノ中ヘウツス作用準同型對應ハ、e ガ巾等元ナル故

$$e \longrightarrow em, \qquad m \in \mathfrak{M}$$

即チ e ノ Bild ヲ定メルコトニヨリ、一意ニ定メラレル。$\mathfrak{M}$ ノ基ガ $v_1, \cdots\cdots, v_m$ デアルカラ、$ev_1, \cdots\cdots, ev_m$ ノ中 K ニ関シ、一次独立ナルモノノ個数ガ丁度 $I(\mathfrak{L}, \vartheta)$ デアル。

$$e(v_1, \cdots\cdots, v_m) = (v_1, \cdots\cdots, v_m)\ B(e)$$

デアルカラ

$$I(\mathfrak{L}, \vartheta) = B(e) \text{ ノ階級}$$

$I(\vartheta^*, \mathfrak{L})$ ニ就テモ同様ニ証明サレル。

定理1. (Nesbitt. loc, cit. Theorem 1)

A ヲ右表現加群ト考ヘタ時, A ノ表現ヲ $\mathfrak{R}$ (第一正規表現)

A ヲ左表現加群ト考ヘタ時, A ノ表現ヲ $\mathfrak{r}$ (第二正規表現)

トシ、更ニ A ノ, 次数 b ナル, 表現 $\mathfrak{L}$ ガ與ヘラレテヰルトスル. 但シ $\mathfrak{L}$ ハ零表現ヲ含マストスル。然ラバ

$$b = I(\mathfrak{L}, \mathfrak{r}) = I(\mathfrak{R}, \mathfrak{L})$$

証明. コノ際 $B(1)$ ハ次数 b ノ単位行列デアル。

扨テ

$$A = Ae_1 + \cdots\cdots + Ae_t, \quad \sum e_t = 1$$

$$e_i e_j = 0 \ (i \neq j)$$

Ae_i ハ indecomposable left ideal

ナル分解ヲ考ヘ、A ノ根基ヲ N トシ、N ニヨル Restklasse ヲ一ヲツケテ示ス。

$e_i A$ ヲ右表現加群トスル表現ヲ $\mathfrak{U}_i$

Ae_i ヲ左表現加群トスル表現ヲ $\mathfrak{V}_i$

$\bar{e}_i \bar{A}$ ニヨリ得ラレル表現（之ハ $\bar{A}\bar{e}_i$ ヲ表現加群トスル表現ト同値）ヲ $\mathfrak{F}_i$

デ表ハス。然ラバ

$$Ae_i \cong Ae_j \rightleftarrows \bar{A}\bar{e}_i \cong \bar{A}\bar{e}_j \rightleftarrows \bar{e}_i \bar{A} \cong \bar{e}_j \bar{A} \rightleftarrows e_i A \cong e_j A$$

（$\rightleftarrows$ ハ両命題ガ同値ナルコトヲ示ス）

デアルカラ（Nakayama: Some studies on regular representations, induced representations and modular representations, Ann. of Math. 39）

$\mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}_i, \mathfrak{F}_i$ ノ中同値デナイモノヲ標出シテソレラヲ $\mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}_i, \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2, \text{-----}, k$ トスルコトガ出來ル。

定理2. $\mathfrak{L}$ ヲ A ノ一ツノ表現トシ, $\mathfrak{F}_\lambda$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ於ケル multiplicity（$\mathfrak{L}$ ヲ ausreduzieren シタトキ、對角線上ニ現ハレル既約表現ノ中 $\mathfrak{F}_\lambda$ ニ同値ナルモノノ個數）ヲ h_λ トスルトキ

$$h_\lambda \gamma_\lambda = I(\mathfrak{L}, \mathfrak{V}_\lambda) = I(\mathfrak{U}_\lambda, \mathfrak{L})$$

ナル関係ガアル, 但シ $\gamma_\lambda = \text{rank of } \bar{e}_\lambda \bar{A} \bar{e}_\lambda$

證明: 補助定理1ニヨリ $B(e_\lambda)$ ノ階數ヲ調ベレバ

ヨイ。

$$\mathfrak{L} \cong \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \mathfrak{F}_\lambda & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \mathfrak{F}_\lambda \ddots \end{pmatrix}$$

$\bar{A}\bar{e}_\lambda$ ノ *Automorphismenkörper* $\bar{e}_\lambda \bar{A} \bar{e}_\lambda$ ニ於ケル表現デハ

$$e_\lambda \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots\ 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix}$$

デアルカラ、$\mathfrak{F}_\lambda$ ナル表現デハ

$$e_\lambda \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots\ 0 & & \\ & & E_{r_\lambda} & \\ & & & 0\ \ddots \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

E_{r_λ} ハ r_λ 次ノ単位行列

デアル。$\mathfrak{F}_\lambda$ ト同値デナイ既約表現 $\mathfrak{F}_k$ $(k \neq \lambda)$ ニテハ、e_λ ハ 0 ニウツルカラ、$B(e_\lambda)$ ノ對角線上ニアル 1 ノ個數ハ $h_\lambda r_\lambda$ デ、他ノ對角線上ノ元素ハ 0 デアル。

即チ $B(e_\lambda)$ ノ零ナラザル *characteristic roots* ノ個數ハ $h_\lambda r_\lambda$ デアル。e_λ ガ巾等元故 $B(e_\lambda)^2 = B(e_\lambda)$、従ツテ $B(e_\lambda)$ ノ *Elementarteiler* ハ *linear* デアルカラ、上記 $h_\lambda r_\lambda$ ガ丁度 $B(e_\lambda)$ ノ階數デアル。

系　K ガ代數的閉体デアレバ

$$h_\lambda = I(\mathfrak{L}, \mathfrak{V}_\lambda) = I(\mathfrak{U}_\lambda, \mathfrak{L})$$

(*Brauer* ノ定理: *Nesbitt. loc. cit. Theorem 5*)

次ニ

$$\mathfrak{U}_i = \text{於ケル } \mathfrak{F}_j \text{ ノ multiplicity ヲ } \tilde{c}_{ji}$$

$$\mathfrak{V}_i = \text{於ケル } \mathfrak{F}_j \text{ ノ multiplicity ヲ } c_{ji}$$

トスルト、上ノ定理ニヨリ

$$r_j c_{ji} = \mathrm{I}(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_j) = \mathrm{I}(\mathfrak{U}_j, \mathfrak{V}_i) = r_i \tilde{c}_{ij}$$

即チ

定理3. $r_j c_{ji} = r_i \tilde{c}_{ij}$

(*Nakayama. loc. cit. Theorem 3*)

更ニ $\mathfrak{U}_\lambda$, $\mathfrak{V}_\lambda$ ノ次数ヲ u_λ, v_λ トスルト定理1ヨリ

$$u_\lambda = \mathrm{I}(\mathfrak{U}_\lambda, \mathfrak{r}) = \mathrm{I}(\mathfrak{r}, \mathfrak{V}_\lambda)$$

$$v_\lambda = \mathrm{I}(\mathfrak{V}_\lambda, \mathfrak{r}) = \mathrm{I}(\mathfrak{R}, \mathfrak{V}_\lambda)$$

(第一ノ等式ハ補助定理1ニヨル)

ヨッテ定理2カラ，次ノ

定理4. $\mathfrak{F}_\lambda$ ノ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル multiplicity ハ v_λ/r_λ

$\mathfrak{F}_\lambda$ ノ $\mathfrak{r}$ ニ於ケル multiplicity ハ u_λ/r_λ

デアル。

ヲ得ル、之ハKが代数的閉体ナルトキノ Nesbitt が上記論文デ述ベテヰル事柄デアル。

次ニ、Aヲ含ムKノ上ノ多元環 A^* ヲ考ヘ、之ヲ前同様直既約ナ左イデヤルノ直和ニ分解スル。但シA, A^* ノ主単位元ハ相等シク1トスル。

$$A^* = A^* e_1^* + \cdots + A^* e_s^*, \quad \sum e_q^* = 1$$

$A^* e_q^*$ ヲAノ左表現加群ト考ヘテ得ルAノ表現ヲ $\mathfrak{L}_q$ トシ、$\mathfrak{L}_q$ ニ於ケル $\mathfrak{F}_\lambda$ ノ multiplicity ヲ $b_{\lambda q}$ トスル、又

$e_\lambda A^*$ ニヨル A^* ノ表現 $\mathfrak{L}^*_\lambda$ ニ於ケル $\mathfrak{F}^*_q$ (A^* ノ根基ヲ N^* トシタトキ、$A^*e^*_q/N^*e^*_q$ ヲ表現加群トシテ得ラレル A^* ノ既約表現) ノ *multiplicity* ヲ $\tilde{a}_{q\lambda}$ トスル。

然ラバ

定理 5. $r_\lambda b_{\lambda q} = r^*_q \tilde{a}_{q\lambda}$, $r^*_q = \text{rank of } \bar{e}^*_q \bar{A}^* \bar{e}^*_q$

ガ成立スル。コレハ中山氏前掲論文ニテ *Frobenius* ノ *induced character* ニ関スル定理ノ擴張ト呼バレテキル定理デアル。

証明 定理 2 ニヨリ

$$r_\lambda b_{\lambda q} = I(\mathfrak{L}_q, \mathfrak{V}_\lambda)$$

$$r^*_q \tilde{a}_{q\lambda} = I(\mathfrak{L}^*_\lambda, \mathfrak{V}^*_q) = I(\mathfrak{U}^*_q, \mathfrak{L}^*_\lambda)$$

但シ、$\mathfrak{V}^*_q$, $\mathfrak{U}^*_q$ ハ夫々 $A^*e^*_q$, $e^*_q A^*$ ヲ表現加群トシテ得ラレル A^* ノ直既約表現トスル。

處デ

$$I(\mathfrak{L}_q, \mathfrak{V}_\lambda) = \text{rank of } e_\lambda A^* e^*_q$$

$$I(\mathfrak{U}^*_q, \mathfrak{L}^*_\lambda) = \text{rank of } e_\lambda A^* e^*_q$$

デアルカラ、定理ガ成立スル。

次ニ、元ニ戻ッテ A ニツイテ考ヘル。d ヲ A ノ一ツノ元トシ、Ad ニヨル A ノ表現ヲ ϑ, dA ニヨル A ノ表現ヲ ϑ^* トシ、$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ ナル表現ニ際シテ

$$d \longrightarrow R(d), \quad d \longrightarrow S(d)$$

トスル。然ラバ

補助定理 2. degree of ϑ = rank of $R(d)$

$$\text{degree of } \vartheta^* = \text{rank of } S(d)$$

従ッテ Frobenius algebra ($\mathfrak{R}$, γ が同値) デハ、ϑ, ϑ^* ノ次数ハ相等シイ。

スベテノ λ ニ對シ $\mathfrak{V}_\lambda \cong \mathfrak{V}_{\lambda'}$ ナルタメノ必要十分條件が求メラレテキル今日 (Nakayama and Nesbitt, Note on symmetric algebra, Ann. of Math. 39) symmetric algebra が weakly symmetric ナルコトノ別証明ハ、ツマラヌカモ知レマセンがコノ際ハ比較的簡單ニ証明サレマスノデ、叙述ヲ稍ゝ一般ニシテ述ベテミマス。

定理6. $\mathfrak{R}$, γ ヲ同一ノ基ニヨリ定義サレタ第一, 第二正規表現トスル。モシ $\mathfrak{R}T = T\gamma$, $\mathfrak{R}T' = T'\gamma$, $|T| \neq 0$ ナル行列 T が存在スレバ d ヲ A ノ任意ノ元トスルトキ, Ad, dA ヲ表現加群トシテ得ラレル A ノ表現 ϑ, ϑ^* ハ同値デアル。

証明: コノ時 A ハ Frobeniusean ナル故補助定理2ニヨリ ϑ, ϑ^* ノ次数ハ相等シイ、今ソレヲ m トスル. $\mathfrak{R}$, γ ヲ與ヘル A ノ基ヲ $u_1, \cdots\cdots, u_n$ トシ

$$(u_1, \cdots\cdots, u_n) = (u_1^*, \cdots\cdots, u_n^*)T, \quad |T| \neq 0$$

ニヨリ $u_1^*, \cdots\cdots, u_n^*$ ヲ定メル。然ラバ定理ノ假定カラ基 $u_1^*, \cdots\cdots, u_n^*$ ヲ採用シタ時ノ A ノ第一, 第二正規表現ハ丁度 γ, $\mathfrak{R}$ トナルコトが分ル。アル一ツノ基ニヨリ得ラレタ $\mathfrak{R}$, γ ニツイテ定理ノ條件ヲ満足スル如キ T が存在スレバ、他ノ基ニヨリ得ラレタ第一、第二正規表現 $\overline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\gamma}$ ニ對シテモ、同様ナル行列 $\overline{T}$ が存在スル。

従ツテ、今

$$A\alpha = u_1 K + \cdots\cdots + u_m K$$

ナル如ク $u_1, \cdots\cdots, u_n$ ガ選バレテキルトシテ差支ヘナイ。

然ラバスベテノ i ニ對シ $u_i \alpha \in A\alpha$ ナル故

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \alpha = R(\alpha) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad R(\alpha) = (\, D_1 \;\; 0 \,),$$

D_1 ハ階數 m ナル (n, m) 型ノ行列

トナル。

所デ $\alpha(u_1^* \cdots\cdots u_n^*) = (u_1^* \cdots\cdots u_n^*) R(\alpha)$

デアルカラ、$\alpha u_1^*, \cdots\cdots, \alpha u_m^*$ ハ K ニ關シ一次獨立デ $i > m$

ニ對シテハ $\alpha u_i^* = 0$ トナル。

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix} a = S(a) \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{pmatrix}, \quad a \in A$$

ニテ，u_i ナル基ノ選ビ方ニヨリ $S(a) = \begin{pmatrix} D(a) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$，

$D(a) \in \vartheta$ ナルコトニ注意シ，上式ニ左ヨリ α ヲ乘ズレバ

$$\begin{pmatrix} \alpha u_1^* \\ \vdots \\ \alpha u_m^* \end{pmatrix} a = D(a) \begin{pmatrix} \alpha u_1^* \\ \vdots \\ \alpha u_m^* \end{pmatrix}, \quad D(a) \in \vartheta$$

トナル。$\alpha u_1^*, \cdots\cdots, \alpha u_m^*$ ハ明ニ αA ノ一ツノ基ヲナスカラ $\vartheta \cong \vartheta^*$ ガ成立スル。

系. symmetric algebra（本定理ニ云フ T ガ symmetric matrix ナル場合）ニテハ $\mathfrak{V}_\lambda \simeq \mathfrak{V}_\lambda$ デアル。

(注意) weakly symmetric algebra デハ，必ズシモ $\mathfrak{V} \cong \mathfrak{V}^*$ ハ成立シナイ。

例ヘバ、上記 Nakayama, Nesbitt 両氏ノ論文所載ノ第一ノ例ニテ $\alpha = a_1 + a_2 + a_3$ トオケバ $\alpha^2 \neq \beta^2$ ナル限リ $\mathfrak{V}$ ト $\mathfrak{V}^*$ トハ同値デナイ。