758. 確率法則ノ分解問題, VII

北川　敏男（阪大）

§8. K[$\mathfrak{L}$], K*[$\mathfrak{L}$] ニ於ケル $\mathfrak{L}$ ノ分解問題（續キ）

〔2〕 安定ナ確率法則（続キ）　安定ナ確率法則ヲ construire スル方法トシテハ、上述ノ他ニ Lévy ハ尚モウ一ツ direct ナ方法[1]ヲ與ヘテ居ルガ、茲デハソノ紹介ハヤメテ、Khintchine ノ簡單ナ構成法[2]ヲ述ベヨウ。前回補助定理9デ與ヘタ如ク、（(36)参照）指數 α ガ各安定ナ確率法則ニ對シテ定マルワケデアルガ、以下述ベル方法ハ $\alpha=1, 2$ ヲ除キ（コノ古典的ナ場合ハ既ニヨク知ラレテ居ル）ソノ他ノ任意ノ α（$0<\alpha<2$）ニ対シテノ構成法ヲ與ヘル。

(i)　$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ ハ相互ニ独立ナ確率変數ノ系列デアリ、ソノ分布函數ハ皆同ジデ $x>0$ ノトキニハ $\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ ニ等シク、$x<0$ ノトキニハ 0 ニナルトスル。$U_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ トオク。他方 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ モ亦相互ニ独立ナ確率変數ノ系列デアッテ $x>0$ ノトキニハ $\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ ニ等シク $x<0$ ノトキニハ 0 ニナルトスル。$V_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ トオク。同様ニ、

---

(1) Journ des Math pures et appl. (VIII) 14, 1935.

(2) Exemples des variables aléatoires obéissant à des lois stables. Bullt. l'université de Moskou Section A, vol. 1 (1937)

$Z_1, Z_2, \cdots\cdots$ ト $W_1, W_2, \cdots\cdots$ トヲ定義スル、ソノ際上ノ parameter λ ハ $\lambda_1+\lambda_2$ トスル。($W_n=Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n$)

(ii) 確率変数列 $U_1, U_2, U_3, \cdots\cdots, U_n, \cdots\cdots, V_1, V_2, \cdots\cdots, V_n, \cdots\cdots$ ヲバ増加系列ニ並ベタモノヲ $D_1, D_2, D_3, \cdots\cdots$ トスル。

<u>補助定理11</u>: スベテノ n ニ對シテ n 変數 $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_n$ ノ répartition ハ n 変數 $W_1, W_2, \cdots\cdots, W_n$ ノソレニ一致スル。

<u>証明</u>: 今 $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_{n-1}$ ノ値ガ與ヘラレタトシ，$D_1, D_2, \cdots\cdots, D_{n-1}$ ノ内ニ含マレル U_i, V_i ナル量ノ最モ大ナル値ヲ U_k, V_l トスル。U_k, V_l ノウチノ少クモ一ツハ D_{n-1} ニ等シイ）$x<D_n<x+\Delta x$ トナル確率ハ次ノ二ツノ確率ノ和ニ等シイ。

1) $X_{k+1}>D_{n-1}-U_k,\ Y_{l+1}>D_{n-1}-Y_l$ ト云フ條件ノモトデノ $x-U_k<X_{k+1}<x+\Delta x-U_k$ デ且ツ $Y_{l+1}>x-V_l$ トナル確率

2) 1) ト同ジ條件ノモトデノ $x-V_l<Y_{l+1}<x+\Delta x-V_l$ デ且ツ $X_{k+1}>x-U_k$ トナル確率

然ルニ明カニ 1) ハ $\lambda_1 e^{-\lambda_1(x-D_{n-1})}e^{-\lambda_2(x-D_{n-1})}\Delta x$ ニ，2) ハ $\lambda_2 e^{-\lambda_2(x-D_{n-1})}e^{-\lambda_1(x-D_{n-1})}\Delta x$ ニ等シイ。

依ツテ $x<D_n<x+\Delta x$ トナル確率ハ

$(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-D_{n-1})}\Delta x$ ニ等シイ，コレハ $W_{n-1}=D_{n-1}$ ノ條件ノモトデノ $x<W_n<x+\Delta x$ トナ

ル確率ニ等シイ。〔証終〕

(iii) 先ヅ $s>1$ トシ

$$(44)\qquad A_s(\lambda_1)=\sum_{k=1}^{\infty} U_k^{-s}$$

ナル級数ヲ考ヘル。k ガ充分大ナルトキ，大数ノ強法則 (*la loi forte des grands nombres*) ニ依リテ U_k ハ殆ンド確カニ k ノ *ordre* デアル。従ツテ (44) ガ収斂スル確率ハ 1 デアル。同様ナコトガ

$$A_s(\lambda_2)=\sum_{k=1}^{\infty} V_k^{-s}, \qquad A_s(\lambda_1+\lambda_2)=\sum_{k=1}^{\infty} W_k^{-s}$$

ニ関シテモイハレル。補助定理11ニ依リ、$A_s(\lambda_1)+A_s(\lambda_2)$ ノ分布函数ハ $A_s(\lambda_1+\lambda_2)$ ノソレニ等シイ。

今 $C_1=\lambda_1^s$, $C_2=\lambda_2^s$, $C_3=(\lambda_1+\lambda_2)^s$ トオキ，$A_s(1)$ ナル確率変数ヲ Ξ デ示サウ。然ラバ

$$C_1\Xi=\lambda_1^s\Xi, \qquad C_2\Xi=\lambda_2^s\Xi,$$

$$C_3\Xi=(\lambda_1+\lambda_2)^s\Xi$$

コレハ，$A_s(\lambda_1)$, $A_s(\lambda_2)$, $A_s(\lambda_1+\lambda_2)$ ト同ジ確率法則ニ従フ，依ツテ

$$C_3^{\frac{1}{s}}=C_1^{\frac{1}{s}}+C_2^{\frac{1}{s}}=\lambda_1+\lambda_2$$

コレニ対シテ $0<\alpha<1$ ナル指数 α ニ対スル安定法則ガ *construire* サレタ。($\frac{1}{s}=\alpha$ トオケバヨイ)

(iv) $\alpha>1$ ノ場合。コノトキ $1/s=\alpha$ トスルト、コノ s ニ対シテハ (44) ハ発散スル確率ガ 1 デアル、依ツテ

$$B_s(\lambda_1)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}U_k^{-s}-\lambda_1^s\frac{n^{1-s}}{1-s}\right\}$$

ナル変形ヲ施ス，コレハ $\frac{1}{2}<s<1$ ニ對シテハ收斂スル確率ガ1デアル．同様ニシテ $B_s(\lambda_2)$, $B_s(\lambda_1+\lambda_2)$ ヲツクル。確率0ノ場合ヲ除イテハ，D_1, D_2, ……, D_n ナル數ノウチ、U_k ハ $\lambda_1 n/(\lambda_1+\lambda_2)$ ニキハメテ近イ（從ッテ V_k ノソレハ，$\lambda_2 n/(\lambda_1+\lambda_2)$ ニ極メテ近イ）ト考ヘルコトガ出來ル。

然ルヲ以テ次ノ二ツノ確率變數

$$\sum_{k=1}^{n}D_k^{-s}-\lambda_1^s\frac{\left(\frac{\lambda_1 n}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{1-s}}{1-s}-\lambda_2^s\frac{\left(\frac{\lambda_2 n}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{1-s}}{1-s}$$

$$\sum_{k=1}^{n}W_k^{-s}-(\lambda_1+\lambda_2)^s\frac{n^{1-s}}{1-s}$$

ハ補助定理11及ビ恒等式

$$\lambda_1^s\left(\frac{\lambda_1 n}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{1-s}+\lambda_2^s\left(\frac{\lambda_2 n}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{1-s}=(\lambda_1+\lambda_2)^s n^{1-s}$$

ニ依ッテ同ジ分布函數ヲモツコトヲ知ル、從ッテ $B_s(\lambda_1)+B_s(\lambda_2)$ ト $B_s(\lambda_1+\lambda_2)$ トハ同ジ分布函數ヲモツ、コレカラ $B_s(\lambda)$ ハ指數 $\alpha\left(=\frac{1}{s}\right)$ ノ安定ナ確率法則デアルコトヲ知ル。

〔証終〕

〔3〕 準安定ナ確率法則： コレハ前々回定義シタ如ク $\mathbb{K}[F]$ ガ結合ニ関シテ閉ヂテ居ル様ナ確率法則（＝分布函數）$F(x)$ ヲ意味スル。即チ次ノ性質ヲモツヤウナ分布函數

$F(x)$ヲ指スノデアル：

(S_2) X_1, X_2ガ相互ニ独立デ且ツ共ニ $F(x)$ヲ分布函数トスルトキニハ，任意ノ $a_1>0$, $a_2>0$，任意ノ実数 b_1, b_2ニ對シテ

$$(45)\quad (a_1X_1+b_1)+(a_2X_2+b_2)=aX+b$$

トナル様ナ $a=\rho(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ト $b=\sigma(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ト $F(x)$ヲ分布函数ニスル確率変数 X トガ定マル事ヲ意味スル。

與ヘラレタ b_1, b_2ヲ常ニ0トシ，bモ亦0トシテ定マルトイフナラバ(S_2)ハ(S_1)トナル。サテカクノ如ク(43)ヲ(44)ニ迄拡張スルコトハ必要ナ事ハ明ラカデアルが、カクシテモ trivial ナ拡張シカ得ラレナイデアロウトモ想像サレテ居ツタ。然ルニ、昨年 A. Khintchine ハソノ豫想ハ當ラナイコトヲ示シタ。

<u>定理 9</u>[(1)] (Khintchine)： 準安定ナ確率法則ノ特性函数 $f(t)$ ハ定理8デ挙ゲタモノノ外ニ尚

$$(46)\quad exp\left\{-|t|+i\beta\frac{2}{\pi}t\log|t|\right\}\qquad(|\beta|\leq 1)$$

ナル形ノモノガアル。$|\beta|\leq 1$ナル任意ノβニ對シテ(45)ハ常ニ準安定ナ確率法則ヲアタヘル。

<u>注意 1</u>： (46)デ $\beta=0$ ナラバ stabil トナツテ定理

---

(1) Invariante Klassen von Verteilungsgesetze: Bullt. de L'Université d'État à Moskou, vol 1. section A (1937)

8，(34) II ニ入ル。$|\beta|\leqq 1$ 且ツ $\beta\neq 0$ デアルナラバ，(46) ハ安定デナイ。

注意2： 相互ニ独立ナ確率変数ノ系列 $X_1, X_2, \cdots, X_n,$ ……ニ於テ各 X_n ノ従フ確率法則ヲ

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x\leqq 1 \text{ ノトキ})\\ 1-\dfrac{1}{x} & (x>1 \text{ ノトキ})\end{cases}$$

トスル。然ルトキニハ，$S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ ノ分布函数ハ $n\to\infty$ ノトキ (45) ノ形ノ分布函数ニ法則収斂ヲナス。

注意3： 相互ニ独立ナ確率変数ノ系列 $X_1, X_2,$ ………，X_n ……ニ於テ各 X_n ノ従フ確率法則ヲ

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & (x\leqq 0 \text{ ノトキ})\\ 1-e^{-x} & (x\geqq 0 \text{ ノトキ})\end{cases}$$

トスレバ，$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{S_k}-\log\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\right\}$ ノ収斂スル確率ハ 1 デ、ソノ和ハ (46) ノ形ノ分布函数ヲモツ (Khintchine)

証明ハ前回與ヘタモノト全ク parellel ニシテ出来ルコトハ疑ヒナイ。