# 753. Produktraum ノ次元ニ就テ

山内　省三（阪大）

§1. $F_1$, $F_2$ ヲ夫々 $r$, $r'$ 次元ノ Kompaktum トスレバ dim. $(F_1 \times F_2) \leq$ dim. $F_1$ + dim $F_2$ （dim. ハ Brouwer ノ意味ノ次元）ハ成立スルガ等号ハ一般ニ成立シナイ（C.R. 190 (1930). Pontrjagin ノ例）。然シ $F_1$ ガ任意次元ノ Kompakt ナ空間, $F_2$ ガ 1 次元ノ separable ナ空間ナルトキハ上ノ等号ガ成立スルコトヲ Hurewicz ガ示シテキル（Ann. of. Math. vol. 36. (1935) p. 194）。$F_2$ ガ一次元ノ Kompaktum ナルトキハ勿論等号ハ成立スル。コヽデハ $F_1$, $F_2$ ガ夫々1ヨリ大ナル次元（Brouwer ノ意味ノ）ノ Kompaktum ナルトキ上ノ等式ガ成立スルタメノ一ツノ充分條件ヲ示シタイ。

§2. Produktraum $F = F_1 \times F_2$ ヲ近似スル Spektrum.

$F_1$, $F_2$ ヲ夫々ゆーくりっど空間 $R$ 内ノ $r$ 次元, $r'$ 次元 Kompaktum トシコレラノ Unterteilung ノ Folge ヲ

$$F_1 : \ p_1, P_2, \ldots\ldots P_h \ldots\ldots$$

$$F_2 : \ p'_1, P'_2, \ldots\ldots P'_h \ldots\ldots$$

（$P_h$, $P'_h$ ハ $\varepsilon_h$-überdeckung. $\lim \varepsilon_h = 0$）

及ビ對應スル Nerv ノ Folge ヲ

$$F_1 : (1) \quad K_1, K_2, \ldots\ldots, K_h, K_{h+1} \ldots$$

$$K_h = \mathfrak{f}_h (K_{h+1}), \ \dim K_h = r$$

$F_2$ : (2) $K'_1, K'_2, \cdots\cdots, K'_h, K'_{h+1} \cdots\cdots$

$$K'_h = \varphi'_h(K'_{h+1}),\ \dim K'_h = r'$$

トスルトFハZellenkomplexノFolge

(3) $K_1 \times K'_1,\ K_2 \times K'_2, \cdots\cdots K_h \times K'_h,\ K_{h+1} \times K'_{h+1}, \cdots$

$\cdots\cdots$ ニヨリ定義サレル。

コヽニ $K_{h+1} \times K'_{h+1}$ カラ $K_h \times K'_h$ ヘノabbildung

$\phi_h$ ハ

$$\phi_h(K_{h+1} \times K'_{h+1}) = \varphi_h(K_{h+1}) \times \varphi'_h(K'_{h+1}) = K_h \times K'_h$$

ニテ定義スル。

$$\dim(K_h \times K'_h) = r + r'$$

(注意) 任意ノ二数 $k, h,\ k > h$ ニ對シテ $K_k \times K'_k$ カラ $K_h \times K'_h$ ヘノProjektion ハ

$$K_h \times K'_h = \phi_h^k (K_k \times K'_k) = \phi_h \cdots\cdots \phi_{k-2} \cdot \phi_{k-1}(K_k \times K'_k)$$

ニテ定義サレル。

證明:[1]

$F_1$ ノ點 $x$, $F_2$ ノ點 $y$ ヲ定義スルProjektionsfolgeヲ夫々

$$\xi(x) = (T_1, T_2, \cdots\cdots, T_h \cdots\cdots)$$

$$\eta(y) = (T'_1, T'_2, \cdots\cdots, T'_h \cdots\cdots)$$

ナルトキ

$F$ ノ點 $p = (x, y)$ ヲ定義スルFolgeトシテ

$$\zeta(x, y) = (T_1 \times T'_1,\ T_2 \times T'_2, \cdots\cdots, T_h \times T'_h \cdots\cdots)$$

---

1) P. Alexandroff „Gestalt und Lage" Ann. of Math. vol. 30.

ヲ考ヘル。

コヽニ $T_k \times T'_k$ ハ simplex デハナイ。

即チ $K_k$, $K'_k$ ガ simplizial デモ $K_k \times K'_k$ ハ simplizial デハナイ。Zellen komplex デアル。

$$\zeta(p_1) = (T_1^{(1)} \times T_1'^{(1)}, T_2^{(1)} \times T_2'^{(1)}, \cdots\cdots, T_k^{(1)} \times T_k'^{(1)}, \cdots\cdots)$$
$$= \mathfrak{X}(x_1) \times \mathfrak{Y}(y_1)$$

$$\zeta(p_2) = (T_1^{(2)} \times T_1'^{(2)}, T_2^{(2)} \times T_2'^{(2)}, \cdots\cdots, T_k^{(2)} \times T_k'^{(2)}, \cdots\cdots)$$
$$= \mathfrak{X}(x_2) \times \mathfrak{Y}(y_2)$$

ナルトキ

$\zeta(p_1)$, $\zeta(p_2)$ ガ benachbar ト云フノハ

(i) $\mathfrak{X}(x_1)$ ト $\mathfrak{X}(x_2)$ トガ benachbar デ $\mathfrak{Y}(y_1) = \mathfrak{Y}(y_2)$

(ii) $\mathfrak{Y}(y_1)$ ト $\mathfrak{Y}(y_2)$ トガ benachbar デ $\mathfrak{X}(x_1) = \mathfrak{X}(x_2)$

(iii) 或ハ $\mathfrak{X}(x_1)$ ト $\mathfrak{X}(x_2)$, $\mathfrak{Y}(y_1)$ ト $\mathfrak{Y}(y_2)$ トガ同時ニ benachbar ノトキ。

上ノ何レノ場合ニモ、ソレガ F ニ於ケル同一ノ点ニ對應スルコトハ明。

$\zeta(p_1)$ ガ $\zeta(p_2)$ ヲ umfassen スルト云フノハ

(i) $\mathfrak{X}(x_1)$ ガ $\mathfrak{X}(x_2)$ ヲ umfassen シテ, $\mathfrak{Y}(y_1) = \mathfrak{Y}(y_2)$

(ii) $\mathfrak{Y}(y_1)$ ガ $\mathfrak{Y}(y_2)$ ヲ umfassen シテ $\mathfrak{X}(x_1) = \mathfrak{X}(x_2)$

(iii) 或ハ $\mathfrak{X}(x_1)$ ガ $\mathfrak{X}(x_2)$ ヲ, 及ビ $\mathfrak{Y}(y_1)$ ガ $\mathfrak{Y}(y_2)$ ヲ夫々同時ニ umfassen スルトキ。

コノ定義カラ先ヅ

F ノ点 $P = (x, y)$ ニハ唯一ツノ Kette $\zeta(p)$ ガ對應スルコトハ容易ニワカル。

逆ニ $\zeta=(T_1\times T_1', T_2\times T_2', \cdots\cdots, T_h\times T_h', \cdots\cdots)$ ニ於テ $F(T_h)$, $F(T_h')$ ヲ夫々 $F_1$, $F_2$ ノ *Unterteilung* ノ $T_h$, $T_h'$ ノ各 *Eckpunkt* ニ對應スルスベテノ *Menge* $F^{(1)}_{i_1\cdots\cdots i_h}$, $F^{(2)}_{i_1\cdots\cdots i_h}$ ノ *Durchschnitt* トスルトキ各 $h$ ニ對シテ夫々スベテノ $F(T_h)$, $F(T_h')$ ニ屬スル唯一點 $x$ 及ビ $y$ ガ存在スル。コノ點 $P(x, y)$ ガ即チ $\zeta$ ニ對應スル $F$ ノ點デアル。

今 *Kette* $\zeta$ ヲ *Raumpunkt*, *Kette* ヲ構成スル各 *Zelle* ヲソノ座標トスレバ任意ノ *Raumpunkt* $\zeta(P_0)=\mathfrak{x}(x_0)\times\mathfrak{y}(y_0)$ ノ *m-te Umgebung* トハ次ノ何レカノ條件ヲ滿足スル *Raumpunkt* $\zeta(P)=\mathfrak{x}(x)\times\mathfrak{y}(y)$ スベテヨリ成ル。

(i) $\mathfrak{x}(x)$ ガ $\mathfrak{x}(x_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬シ $\mathfrak{y}(y_0)=\mathfrak{y}(y)$

(ii) $\mathfrak{y}(y)$ ガ $\mathfrak{y}(y_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬シ $\mathfrak{x}(x_0)=\mathfrak{x}(x)$

(iii) $\mathfrak{x}(x)$ ガ $\mathfrak{x}(x_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬シ, 同時ニ $\mathfrak{y}(y)$ ガ $\mathfrak{y}(y_0)$ ノ *m-te Umgebung* ニ屬スル。

カクシテ *Spektrum* ニヨリ定義サレタ空間ヲ $\mathfrak{F}$ トスレバ上ノコトカラ

$F$ ト $\mathfrak{F}$ トノ間ニハ一對一ノ對應 $f$ ガ存在スル。次ニコノ $f$ ガ兩連續ナルコトヲ云フ。($F_1$ ニ於テハ $f=f_1$, $F_2$ ニ於テハ $f=f_2$ 即チ $f(x, y)=(f_1(x), f_2(y))=\mathfrak{x}(x)\times\mathfrak{y}(y)$)

(i) $f$ ハ $F$ ヲ $\mathfrak{F}$ ニ連續ニ abbilden スル。

$F \ni P(x,y)$: $P(x,y)$ ノ $x, y$ ニ對シテ $\varepsilon_x^m$, $\varepsilon_y^m$ ヲ夫々 $x, y$ ヨリ $F_1$, $F_2$ ニ於テ $x, y$ ヲ含マザル Unterteilung ノ Menge $F^{(1)}_{i_1 \cdots\cdots i_m}$, $F^{(2)}_{i_1 \cdots\cdots i_m}$ ノ和集合 $\Psi_x^m$, $\Psi_y^m$ ニ至ル距離トスル。$\rho_x^m$, $\rho_y^m$ ヲ夫々 $\varepsilon_x^1$, $\varepsilon_x^2$, $\cdots\cdots \varepsilon_x^m$ 及ビ $\varepsilon_y^1$, $\varepsilon_y^2$, $\cdots\cdots \varepsilon_y^m$ ノ最小ノモノトシ $\mathrm{Min}\,(\rho_x^m, \rho_y^m) = \rho^m$ トスル。今任意ニ定メタ F ノ点 $P_0(x_0, y_0)$ ニ對シ $U_m(\mathfrak{x}_0)$, $U_m(\mathfrak{y}_0)$ ヲ $\mathfrak{x}_0(x_0) = f_1(x_0)$, $\mathfrak{y}(y_0) = f_2(y_0)$, m-te Umgebung トスレバ $\rho(x_0, x) < \rho^m$, $\rho(y_0, y) < \rho^m$ ナル $x, y$ ニ對シテハ各 $m$ ニ就テ $\mathfrak{x}(x) \subset U_m(\mathfrak{x}_0)$, $\mathfrak{y}(y) \subset U_m(\mathfrak{y}_0)$

$$\therefore \quad \zeta(p) = \mathfrak{x}(x) \times \mathfrak{y}(y) \subset U_m(\mathfrak{x}_0) \times U_m(\mathfrak{y}_0)$$
$$= V_m(\mathfrak{x}_0 \times \mathfrak{y}_0)$$

コノコトハ各 $m$ ニ對シテ成立ツ。 (以上)

(ii) $f$ ハ $\mathfrak{F}$ ヲ $F$ ニ連續ニ abbilden スル。

$\varepsilon > 0$ 及ビ $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0) \subset \mathfrak{F}$ ガ任意ニ與ヘラレタトスル。充分大ニ $m$ ヲトッテ $\varepsilon_m < \varepsilon$ ナラシム。任意ニ選バレタ $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \subset V_m(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0)$ ニ對シテ $\mathfrak{x} \subset U_m(\mathfrak{x}_0)$, $\mathfrak{y} \subset U_m(\mathfrak{y}_0)$ 從ッテ $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, $\rho(y, y_0) < \varepsilon$ (以上)

§3. $F_1$, $F_2$ ヲユークリッド空間 $R$ 内ニアル次元 (Brouwer ノ意味ノ) $r$, $r'$ ナル einfach zyklische Menge[2] トスレバ $\dim(F_1 \times F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

証明: $\dim(F_1 \times F_2) \leqq \dim F_1 + \dim F_2$ ハ既ニ知ラレテヰルカラ $\dim(F_1 \times F_2) \geqq \dim F_1 + \dim F_2 = r + r'$ ナルコトヲ云ヘバヨイ。 (脚註2ハ次頁へ)

$F_1, F_2$ ノ Unterteilung ノ Folge ヲ

$$(1)\quad \begin{cases} F_1: & P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k, \cdots\cdots \\ F_2: & P'_1, P'_2, \cdots\cdots, P'_k, \cdots\cdots \end{cases}$$

$F_1, F_2$ ニ於テ幾何学的ニ実現サレタ Nerv ノ Folge 即チ Projektionsspektrum ヲ

$$(2)\quad \begin{cases} F_1: & N_1, N_2, \cdots\cdots, N_k, \cdots\cdots & \varphi_k = (N_{k+1}) = N_k \\ F_2: & N'_1, N'_2, \cdots\cdots, N'_k, \cdots\cdots & \varphi'_k = (N'_{k+1}) = N'_k \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_k\text{-Überführung } \psi_k \ (\lim \varepsilon_k = 0) \\ \varepsilon'_k\text{-Überführung } \psi'_k \ (\lim \varepsilon'_k = 0) \end{array}\right\}$$ ニヨリ $F_1, F_2$ ノ移ル

$\overline{N}_k, \overline{N}'_k$ ノ Teilmenge. $\overline{N}_{k,1} \subset \overline{N}_k$, $\overline{N}'_{k,2} \subset \overline{N}'_k$ ($N_{k,1} \subset N_k$, $N'_{k,2} \subset N'_k$) トスル。

$F_1, F_2$ ガ einfach zyklisch ナル故 $\overline{N}_{k,1}, \overline{N}'_{k,2}$ ハ連続函数 $g_k, g'_k$ ニヨリ $S^r, S^{r'}$ ニ wesentlich ニ abbilden サレル. 従ッテ Hopf ノ Satz ニヨリ各 $N_{k,1}, N'_{k,2}$ 内ニ algebraisch Zyklus $Z_k, Z'_k \pmod{m_k}$ ガ存在シテ $g_k, g'_k$ ニヨル grad ハ Null デハナイ $\pmod{m_k}$.

$$\left.\begin{array}{l} Z^r = (z_1^r, z_2^r, \cdots\cdots, z_k^r, \cdots\cdots) \\ Z'^{r'} = (z'^{r'}_1, z'^{r'}_2, \cdots\cdots, z'^{r'}_k \cdots\cdots) \end{array}\right\}$$ ハ夫々 $F_1, F_2$ ニ於テ $\nsim 0$ ナル wahr Zyklus.

$Z_1 \times Z_2 \nsim 0$ in $F = F_1 \times F_2$ ガ云ヘレバヨイ。

$$Z_1 \times Z'_2 = (z_1 \times z'_1, z_2 \times z'_2, \cdots\cdots, z_k \times z'_k, \cdots\cdots) \sim 0 \text{ in}$$

---

2) P. Alexandroff Dimensionstheorie Math. Ann. 106, 5. Hauptsatz)

F ト假定スルト

$Z_k^r \times Z_k'^{r'} = \dot{C}_k^{r+r'+1}$ ナル Komplex $C_k^{r+r'+1}$ ガ F 内ニ存在ス。

$\Phi_k(F) = (\psi_k(F_1), \psi'_k(F'_2))$ ナル連續函數ニヨリ F ハ Menge.

$\bar{N}_{k,1} \times \bar{N}'_{k,2}$ ニ überführen サレル。コノ際

$\Phi_k(Z_k \times Z'_k) = Z_k \times Z'_k \subset N_{k,1} \times N'_{k,2}$ 便宜上 $C_k^{r+r'+1} = C$ ト書ク。C ヲ充分小サク Unterteilen シテ（ソノ際 $Z_k \times Z'_k$ モ unterteilen サレルガ、コレハ $N_k, N'_k$ ヲ unterteilen スルコトニヨリ各 $Z_k, Z'_k$ ヲ unterteilen シテオク）コレヲ $C'$ トスルトキ $\Phi_k(C')$ ガ $\delta$-Komplex ナル樣ニスル。コヽニ $\delta < d(P_k)$, $\delta < d(P'_k)$ [3)]

$Z_k \times Z'_k = \Phi_k(\dot{C}) = (\Phi_k(C))^\cdot$, $Z_k, Z'_k$ ノ Unterteilung ヲ $\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}'_k$ トスレバ

$\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}'_k = \Phi_k(\dot{C}') = (\Phi_k(C'))^\cdot = \dot{C}''$ コヽニ $\Phi_k(C') = C''$.

$C''$ ノ頂點ノ内 $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}'_k$ ノ頂點デ Unterteilung ニヨリ新ニ出來タモノ、例ヘバ $P(x, y)$ ハ夫々 $x, y$ ヲ含ム $P_k, P'_k$ ノ Element ニ對應スル頂點ニ移シ $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}'_k$ 以外ノモノ、例ヘバ $p'(\psi_k(x), \psi'_k(y))$ ハ $\psi_k(x), \psi'_k(y)$ ヲ含ム $P_k, P'_k$ ノ Element ニ對應スル頂點ニ移ス、コレラノ Verschiebung ヲ $\phi$ トスレバ、$\phi(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}'_k) = Z_k \times Z'_k$, $\phi(C'') = C'''$, $C'''$ ハ $N_{k,1} \times N'_{k,2}$ ノ Teilkomplex デ

$\dot{C}''' = Z_k \times Z'_k$ in $N_{k,1} \times N'_{k,2}$

3) Alexandroff „gestalt u. Lage" P. 116

故ニ $C'''$ ハ degenerated complex.

従ッテ $\dot{C}'''$ ハ degenerated. 一方 $Z_k \times Z'_k$ ハ not degenerated, コレハ矛盾.

$$\therefore \quad Z_k \times Z'_k \not\sim 0 \quad \text{in } F = F_1 \times F_2$$

$$\therefore \quad \dim(F) = \dim(F_1 \times F_2) \geqq r + r'$$

$$\therefore \quad \dim F = \dim F_1 + \dim F_2 .$$

q. e. d.

コノ方法ハ Sphäre ニ wesentlich ニ abbilden サレルコトカラ $F$ ニテ $\not\sim 0$ ナ Zyklus ヲ見出ス方法デアッタ、直接ニヤルニハ即チ

定理:

ゆーくりっど空間 $R$ 内ニアル $r$, $r'$ 次元ノ Kompaktum $F_1$, $F_2$ ニ於テ夫々 not homolog Null ナル wahrer Zyklus (nach variable Modul) $Z^r$, $Z^{r'}$ が存在スルトキハ $Z^r \times Z^{r'}$ モ亦 $F_1 \times F_2$ ニ於イテ not homolog Null ヲ証明スレバヨイ。

証明ハ前ト殆ンド同ジデアル。ヤハリ $Z \times Z' \sim 0$ in $F$ ト仮定シテ $Z_k \times Z'_k = \dot{C}_k$ ナル Komplex $C_k$ ヲ考ヘルノデアルが $\Phi_k$ ニヨリ $F$ ヲ $\overline{N}_{k,1} \times \overline{N}'_{k,2}$ ニ überführen シタ際ニ $\psi_k(Z_k)$, $\psi'_k(Z'_k)$ ハ夫々 $\overline{N}_{k,1}$, $\overline{N}'_{k,2}$ 内デ少シズレルカラ $C_k$ ヲ充分小サク unterteilen シテ $\Phi_k(C')$ がヤハリ $\delta$-Komplex ナル様ニスル、コヽニ $\delta < d(P_k)$, $\delta < d(P'_k)$

$\Phi_k(C')$ ノ Eckpunktverschiebung $\phi$ ヲ今度

ハ $\Psi_k(\mathfrak{Z}_k)$, $\Psi'_k(\mathfrak{Z}'_k)$ ニモホドコストコト。適當ニ大ナルkニ對シテハ $\Phi\Psi_k(\mathfrak{Z}_k)$, 及ビ $\Phi\Psi'_k(\mathfrak{Z}'_k)$ ハ夫々 $N_{k,1}$, $N'_{k,2}$ ニ於ケル degenerate シナイ Zyklus.

然モ $\Phi\Psi_k(\mathfrak{Z}_k)\times\Phi\Psi_k(\mathfrak{Z}'_k)=(\Phi\Xi_k(C'))^{\cdot}$.

in $N_{k,1}\times N'_{k,2}$

故ニ $(\Phi\Xi_k(C'))^{\cdot}$ ハ degenerate ナ Komplex 故ニソノ Rand ハ degenerate コレハ矛盾。 q.e.d.