746. Doeblin ノ結果ノ積分方程式的取扱ヒ

吉田　耕作（阪大）

W. Doeblin ノ論文 *Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certaines types* de chaîne simple (Bull. math. Soc. Roumaine de Sc. 39 (1937)) ノ主ナ結果ヲ角谷氏ガ談話 728, 739, 743 ニ於テワカリ易ク補ヒナガラ紹介サレタ。相當精シイ結果デアリ且ツソノ集合論的論法ハ面白イケレドモ，次ノ如ク積分方程式流ノ取扱ヒヲスルト spectre トノ關係モツクシ談話 679, §6 ノ $\boxed{\text{定理}}$[1] ノ應用ニモナルノデ之レヲ述べテミヨウ。尚本談話ニ色々御助力ヲ受ケタ角谷氏ニ厚ク感謝致シマス。

§1. 豫 備

$P(x, E)$ ハ x ($0 \leqq x \leqq 1$) ヲ fix スレバ $(0,1)$ 内ノ Borel 集合ニ関シテ total-additive non negative 且ツ $P(x, \Omega) \equiv 1$, $\Omega = (0,1)$。又 E ヲ fix スレバ x ニ関シテ Borel measurable トスル。今

$$(1) \quad \begin{cases} 0 < \eta,\ b < 1 \text{ ガ存在シテ } x \text{ ニ関シテ一様ニ} \\ mes(E) < \eta \text{ ナラバ } P(x, E) < 1 - b \end{cases}$$ [2]

ガ満足サレタリトスレバ[3]

$$P(x, E) = \int_E g(x, y)\, dy + R(x, E); \quad 0 \leqq g(x, y) \leqq \frac{1}{\eta},$$

$$0 \leqq R(x, E) \leqq 1 - b.$$

---

(1) 角谷氏談話 680 ノ定理 6 ニ別証明ヲ與ヘラレタ。

(2) Doeblin ノ條件.

(3) 角谷氏談話 738, P.572.

ヨツテコノ積分 operator ニヨツテ $(\mathfrak{M})$[1] ヲ $(\mathfrak{M})$ 内ニ写ス線型 operator

$$\mathrm{P}=\mathrm{Q}+\mathrm{R},\ \psi=\mathrm{P}\cdot\varphi,\ \psi(E)=\int_0^1\varphi(dx)\mathrm{P}(x,E)$$

ハ $\|\mathrm{P}\|=1,\ \|\mathrm{Q}\|\leq 1,\ \|\mathrm{R}\|<1-b$ ヲ満足スル。Q ガ vollstetig ナラ談話 679 ノ $\boxed{\text{定理}}$ ガ使ヘテ Doeblin ノ結果ガ積分方程式流ニ扱ヘルコトガワカツタ。然シ有界可測ナ核ニヨル積分 operator ハ空間 (L) デハ一般ニハ vollstetig ニナラヌ[2] カラ Q ハ vollstetig ニハナラナイ。[3] 所ガ $\boxed{\text{定理}}$ ヲ使フニハ $\|\mathrm{P}^n-\nabla\|<1$ ナル如キ n ト vollstetig ナ ∇ ガアレバヨイノダカラ，上ノ Q ヲ今少シ調ベタラ望ミガアルカモ知レヌト思ツテ考ヘテミヌ。ソウシタラ談話 744 ノ定理ヲ得タ。[4] 之レヲ使ヘバ P ニ $\boxed{\text{定理}}$ ノアテハマルコトガワカル。即チ

---

(1) (0, 1) ノ Borel 集合デ total additive ナ集合函数 $\varphi(E)$ ノ作ル Banach 空間：norm $\|\varphi\|=\varphi$ ノ total variation

(2) 嘗テ筆者ノ疑問ニ対シ角谷氏ガ例ヲ作ツテ下サツタ。談話 744 ニアゲテアル。

(3) 併シ schwach vollstetig ニハナル。角谷氏談話

(4) 筆者ノ証明ハ Kolmogoroff - Riesz ノ定理ノ他ニ Egoroff ノ定理ヲ援用シ甚ダ拙イモノデアツタ。

談話 744 ニノセタ証明並ニ注意ハ三村氏ニヨル。尚本号ノ談話参照。

Lemma 1. $\| P^n - \nabla \| < 1$ ナル如キ n ト vollstetig ナ ∇ トガ存在スル（$\|P\| = 1$ ダカラ従ッテ $\boxed{\text{定理}}$ ガ P ニ対シアテハマル）。

証明: $$P^n = Q^n + Q^{n-1}R + Q^{n-2}RQ + \cdots\cdots + RQR^{n-2} + QR^{n-1} + R^n.$$

$RQ^{n-3}RQ$ ノ如ク Q ヲ factor トシテ少クトモ二ツ含ム term ハ vollstetig。何者，$Q^{n-3}R, Q$ ハ夫々有界可測ナ核ニヨル積分 operator ダカラ $r(x,y), s(x,y)$ ヲ夫々有界可測トスルトキ（R ハ stetig）

$$\varphi \longrightarrow \Phi, \quad \Phi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) \int_E dz \int_0^1 dy\, r(x,y)\, s(y,z)$$

ガ vollstetig ナコトヲ云フトヨイ。ソノタメニハ Φ ハ絶対連続ダカラ Φ ノ微分ガ (L) ノ norm ノ意味デ compact ナラヨイ。(1) ソノ compact ノ証明ハ定理ト同様ニシテ得ラレル。

Q ヲ高々一ツシカ factor トシテ含マヌ term ノ数ハ $n+1$ コ，且ツ各々ノ norm $\leqq (1-b)^{n-1}$ ダカラ，n ヲ充分大キクトレバ $(n+1)(1-b)^{n-1} < 1$ ニヨリ Lemma ヲ

---

(1) $Q^{n-3}RQ = Q^{n-3}(RQ)$ ト分解シテ定理ガ使ヘルト思ッタノデスガ角谷氏ガ $(Q^{n-3}R)\cdot Q$ ト分解スレバヨイト考ヘテ下サッタ。trivial ダッタ訳デ汗顔ノ至リデス。尚有界可測ナ核ガ schwach vollstetig ナコトカラ定理ノ注意ノ様ニシテモ証明出来ル訳デス。ソノトキニハ分解スルコトハ要リマセン。

得ル。

Lemma 2. P^n ノ絶對値 1 ノ固有値 λ ハ $\lambda^m=1$ (m ハ正整數 $\leq \frac{1}{\eta}$) ヲ滿足スル。P^k ($k\geq n$) ニツイテモ同様。

證明[1].

$$\varphi(E)=\lambda\int_0^1\varphi(dx)P^{(n)}(x,E),\quad |\lambda|=1,\quad \|\varphi\|=1$$

トスル。P^n ガ $\boxed{\text{定理}}$ ノ條件滿足スルカラ，P^n ノ固有値 λ ニ屬スル固有空間ヘノ projection operator P_λ ヲ定義スル $P_\lambda(x,E)$ ガ存在スル。即チ

$$\varphi(E)=\int_0^1\varphi(dx)P_\lambda(x,E),$$

$$\lambda P_\lambda(x,E)=\int_0^1P^{(n)}(x,dy)P_\lambda(y,E)=\int_0^1P_\lambda(x,dy)P^{(n)}(y,E),$$

$$P_\lambda(x,E)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{P^{(ni)}(x,E)}{\lambda^i}\quad(\text{一様收斂}).$$

故ニ任意ノ $g(y)\in(M)$ ニ對シ (M) ニ屬スル

$$h(x)=\int_0^1P_\lambda(x,dy)\,g(y)$$

ハ固有値方程式

$$(*)\quad h(x)=\lambda\int_0^1P^{(n)}(x,dz)\,h(z)$$

---

(1) P^n ノ共軛 operator ノ具体的ナ形ガワカラヌカラ，Mazur 定理ノ拡張（談話 736）ヲ使フ證明ハスグ出來ナイ。然シココデノ idea ハ談話 736 ニ於ケルト同ジデアス。

ヲ満足スルコトガワカル。$\|\varphi\|=1$ ダカラ P_λ ハ zero operator デナイ。従ッテ φ ヲ適當ニトルト $h \neq 0$。ソウスレバ $\lambda^m=1$（m 有界）ナコトハ Frechet ノ論法デワカル。[1]

<u>Lemma 3.</u> P^k ノ固有値 1 ノ multiplicity ハ k ニ對シテ一様有界デアル。

證明： 全ベテノ k ニ對シ $P^{(k)}(x,E)$ ハ同ジ ε, η デ Doeblin ノ條件ヲ充スコト明カダカラ，談話 724, §12 系ト同ジコトヤルトヨイ。アソコデ使ッタノハ，今ノ case デ云フト

$$\varphi(E)=\int_0^1 \varphi(dx)P^{(n)}(x,E)$$

ナラ φ ノ total variation on E: $\tilde{\varphi}(E)$ ガ又

$$\tilde{\varphi}(E)=\int_0^1 \tilde{\varphi}(dx)P^{(n)}(x,E)$$

ヲ満足スルト云フコトデアッタカラ。[2] ── 以上 ──

故ニ Lemma 1, Lemma 2, Lemma 3 カラ充分 n ヲ大キクトルト P^n ハ $\boxed{\text{定理}}$ ノ條件ヲ満足シ且ツ P^n ハ 1 以外ニ絶對値 1 ノ固有値ヲモタヌ。ヨッテ $\boxed{\text{定理}}$ カラ

---

(1) 談話 736, p. 594 ヲミラレタイ。尚コノ Lemma ノ證明ニハ $\boxed{\text{定理}}$ ヲ使ハズトモ mean ergodic theorem デ間ニ合フコトハ注意スル迄モナイ。

(2) Kryloff-Bogoliouboff ノ論法（談話 678, §3，訂正談話 679 參照）

$$(2)\quad \begin{cases} P^n = P_1 + S.\ P_1 S = S P_1 = 0,\ P_1^2 = P_1 = P^n P_1 = P_1 P^n \\ \|S^m\| \leqq \dfrac{C}{(1+\delta)^m}\ (C, \delta > 0),\ P_1 = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m}(P^n + P^{2n} + \cdots + P^{nm})^{(1)}. \end{cases}$$

ニヨッテ P_1 ヲ定義スル non-negative ナ $P_1(x, E)$ ハ

$$(3)\quad P_1(x, E) = \int_0^1 P_1(x, dy) P^{(n)}(y, E),\quad P_1(x, \Omega) = 1$$

ヲ満足スル。所ガ尚

Lemma 3 ノ証明ト同様ニシテ（Kryloff-Bogoliouboff ノ論法）デ $\varphi_1(E), \varphi_2(E), \text{-----}, \varphi_k(E)$ ガ存在シテ

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_i \geqq 0,\ \varphi_i(E)\,\varphi_j(E) = 0,\ \varphi_i(\Omega) = 1. \\ \qquad\qquad \varphi_i(E) = \int_0^1 \varphi_i(dx) P^{(n)}(x, E). \\ \text{且}\ \varphi \geqq 0,\ \varphi(\Omega) = 1,\ \varphi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) P^{(n)}(x, E) \\ \text{ナル如キ任意ノ}\ \varphi\ \text{ハ}\ \varphi(E) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(E),\ c\ \text{常数} \\ \geqq 0,\ \sum c_i = 1\ \text{ト表ハサレル。} \end{cases}$$

§2. Doeblin ノ結果ノ導キ方

(3), (4) ニヨリ

$$(5)\quad P_1(x, E) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x) P_i(E),\quad c_i(x) \geqq 0\ \text{且}\ \sum_{i=1}^{k} c_i(x) = 1.$$

$\varphi \geqq 0,\ \varphi(\Omega) = 1$ ナラ $\psi = P\cdot\varphi$ ハ又 $\psi \geqq 0,\ \psi(\Omega) = 1$ ヲ満ス。$P^n(P\varphi_i) = P(P^n\varphi_i) = P\varphi_i$ ダカラ (4) ニヨリ

---

(1) uniform limit

(6) $P\varphi_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\varphi_j$, $c_{ij} \geqq 0$ 且ツ $\sum_{j=1}^{k} c_{ij} = 0$

$(i = 1, 2, \ldots\ldots, k)$

$P^n \cdot \varphi_i = \varphi_i$ ニヨリ行列 $C = \| c_{ij} \|$ ハ $C^n =$ unit matrix. コノコトカラ C ハ k コノ文字 $1, 2, \ldots\ldots, k$ ノ permutation ヲ表ハスコトガワカル。何者、$C^{n-1} \| c_{ij}^{(n-1)} \|$ ト置クト

$c_{ij}^{(n-1)} \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{k} c_{ij}^{(n-1)} = 1$ ダカラ $C^{n-1} \cdot C =$ unit matrix ナル掛ケ算ヲ実際書キ下シテミルトワカル。[1]

故ニ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_k$ ハ P ヲ施スト cyclic ニ permutate サレル幾ツカノ組ニワカレル。之等ノ組ヲ第1組, 第2組, ……, 第s組ト名付ケ且ツ第i組ニ入ッテル φ ノ個数ヲ d_i トスル: $\sum_{i=1}^{s} d_i = k$.

φ_i ハ total additive non negative ダカラ Radon-Nikodym ノ定理[2] ニヨリ $\varphi_i(E) = \int_E f_i(x)\,dx + \varphi_i(H_i \cdot E)$ ($f_i \geqq 0$, H_i ハ measure zero ノ集合)。ヨツテ $f_i(x) > 0$ ナル如キ x ノ集合ニ H_i ヲ付ケ加ヘタモノヲ $\mathcal{E}_i$ トスレバ (4) ニヨリ $\mathcal{E}_i$ ハ互ニ disjoint 且 $\varphi_i(\mathcal{E}_i) = 1$ 又 $\varphi_i(E) > 0$ if $E \subset \mathcal{E}_i$, mes$(E) > 0$.

(6) $G_\alpha = \sum \mathcal{E}_i$ (φ_i ガ第α組ニ入ッテル様ナ i ニ付イテノ和)

---

(1) 之ハ角谷氏ニ考ヘテ頂イタ。極メテ面白イコトデス。

(2) Saks: Theory of integrals, p.

ト置ケバ，Doeblin ノ結果（角谷氏談話 728）ニ於ケル

G_α ($\alpha=1,2,\cdots\cdots,s$) ガ final set ヲ為シ且 d_α ハ G_α ニ attach サレタ数デアル。

<u>証明.</u>　以下ノ事実ヲ証明スル。

i)　$x\in\Omega$ ニ對シテ一様ニ

$$P^{(t)}(x,\Omega-\sum G_\alpha)\leqq M\tau^t \qquad (t=1,2,\cdots\cdots)$$

ナル如キ常数 $M>0$，$1>\tau>0$ ガ存在スル。

ii)　殆ド全テノ $x\in G_\alpha$ ニ對シテ $P(x,G_\alpha)=1$

iii)　$G'_\alpha\subset G_\alpha$ 且 $mes(G_\alpha-G'_\alpha)=0$ ナル如キ G'_α ガ存在シテ $E\subset G_\alpha$，$mes(E)>0$ ナラバ，$P^{(m)}(x,E)>0$ for $x\in G'_\alpha$ ナル如キ $m=m(x,E)$ ガ定ル。

iv)　$\mathcal{E}_i\subset G_\alpha$ ナラバ，$x\in(G'_\alpha\cdot\mathcal{E}_i)$ 及ビ $E\subset\mathcal{E}_i$ ニ對シテ一様ニ $|P^{(md_\alpha)}(x,E)-\varphi_i(E)|\leqq N\sigma^{-m}$ ($m=1,2,\cdots\cdots$) ナル如キ常数 $N>0$，$1>\sigma>0$ ガ定ル。

<u>i) ノ証明.</u>　$\mathcal{E}_i$ ノ定義ト (2), (5) カラ

$$P^{(ns)}(x,\Omega-\sum G_\alpha)=P^{(ns)}(x,\Omega-\sum\mathcal{E}_i)$$
$$=S^{(ns)}(x,\Omega-\sum\mathcal{E}_i)$$

ヨッテ，(2) ト $\|P\|=1$ カラ明カ。

<u>ii) ノ証明.</u>　$G_1=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\cdots\cdots+\mathcal{E}_{d_1}$ トスルト

$P\varphi_1=\varphi_2$，$P\varphi_2=\varphi_3$，$\cdots\cdots$，$P\varphi_{d_1}=\varphi_1$ ダカラ

$$\varphi_1(E)+\varphi_2(E)+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}(E)$$

$$=\int_0^1\{\varphi_1(dx)+\varphi_2(dx)+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}(dx)\}P(x,E).$$

ヨッテ $E=G_1$ ト置クト

$$1=\int_0^1\{\varphi_1(dx)+\varphi_2(dx)+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}(dx)\}P(x,G_1).$$

$0\leqq P(x,G_1)\leqq 1$ 且 $\{\varphi_1+\cdots\cdots+\varphi_{d_1}\}\geqq 0$, $\{\varphi_1(G_1)+\cdots$ $\cdots+\varphi_{d_1}(G_1)\}=1$ ニヨリ, 殆ド総テノ $x\in G_1$ ニ對シ $P(x,G_1)=1$.

iii) ノ證明. (2), (3), (4) ニヨリ

$$\varphi_i(E)=\int_0^1\varphi_i(dx)\,P_1(x,E)$$

ヨッテ $E=\mathcal{E}_i$ トヨクト $1=\int_0^1\varphi_i(dx)\,C_i(x)$ ヲ得ル。

$0\leqq C_i(x)\leqq 1$ 且 $\varphi_i\geqq 0$, $\varphi_i(\mathcal{E}_i)=1$ ニヨリ $\mathcal{E}_i$ 内殆ド至ル所デ $C_i(x)=1$. 故ニ $E\in\mathcal{E}_i$ ガ $mes(E)>0$ ナラバ

(7) $P_1(x,E)=P_i(E)>0$ (殆ド総テノ $x\in\mathcal{E}_i$ ニ対シ).

ヨッテ (2) カラ證明ヲ得ル.

iv) ノ證明. (2) ト (7) カラ明カ。 ——以上——

最後ニ一ツ

注意. P ガ G_1[1] デ $\lambda\neq 1$, $|\lambda|=1$ ナル如キ固有値モツタメノ必充條件ハ $d_1\neq 1$ ナルコトデアル。

證明. 充分. $d_1>1$ トスル。 $P\cdot\varphi_i=\varphi_{i+1}$ $(\varphi_{d_1+1}=\varphi_1)$ ニヨリ $\lambda^{d_1}=1$ ナラ

$$\lambda P\cdot(\varphi_1+\lambda\varphi_2+\lambda^2\varphi_3+\cdots\cdots+\lambda^{d_1-1}\varphi_{d_1})$$

---

(1) ii) ニヨリ G_1 ヲ最初ニ出発シタ $\mathcal{A}$ ト考ヘルコトガ出来ル。

$$=(\varphi_1+\lambda\varphi_2+\cdots\cdots+\lambda^{d_1-1}\varphi_{d_1})$$

ヨッテ $(\varphi_1+\lambda\varphi_2+\cdots\cdots+\lambda^{d_1-1}\varphi_{d_1})$ ガ或ル λ ($\lambda\neq 1$, $\lambda^{d_1}=1$) ニ対シ $\neq 0$ ナコトガ云ヘルトヨイ。之ハ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_{d_1}$ ガ一次独立ナコトカラワカル (E. Schmidt ノ論法)。

<u>必要</u>. $\lambda P\varphi=\varphi$, $\lambda\neq 1$, $|\lambda|=1$, $\varphi\neq 0$, 且ツ $d_1=1$ トシテ矛盾ヲ出ス。$d_1=1$ カラ iv) ニヨリ P^m ハ $m\to\infty$ ト共ニ一様収斂スル。一方 Lemma 3 ヲ使ヘバ $P^m\varphi=\lambda^{-m}\varphi$ ハ m ニツイテ periodic (period >1) ダカラ矛盾.

—— 以上 ——

之デ談話 724, §12 ノ終リニ述ベタ"積分方程式流ノ証明"ガ出来タ譯ニモナリマシタ。