740. Continuous geometry ニ就テ. II

古屋　茂
小平邦彦 (東大)

§ 3. L－number

定義8. $\pi = \begin{pmatrix} j^{(1)} \cdots\cdots j^{(m)} \\ k^{(1)} \cdots\cdots k^{(m)} \end{pmatrix}$ ガ與ヘラレタトキ

$j_1^{(\mu)} = j^{(\mu)}$, $j_\sigma^{(\mu)} = k^{(\mu)}$, $\mu \neq \mu_\rho$ ナラバ
$j_\rho^{(\mu)} = j_{\rho+1}^{(\mu)}$ トナル $j_\rho^{(\mu)}$ ヲ任意ニ定メ

$$P\begin{pmatrix} j^{(1)} \cdots\cdots j^{(m)} \\ k^{(1)} \cdots\cdots k^{(m)} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} j_1^{(1)} \cdots\cdots j_1^{(m)} \\ j_2^{(1)} \cdots\cdots j_2^{(m)} \end{pmatrix} \cdots\cdots P\begin{pmatrix} j_{\sigma-1}^{(1)} \cdots j_{\sigma-1}^{(m)} \\ j_\sigma^{(1)} \cdots j_\sigma^{(m)} \end{pmatrix}$$

ニヨッテ $P(\pi)$ ヲ定義スル。

定義9.[7] $b_{ij}\,P\begin{pmatrix} i\,j \\ k\,k \end{pmatrix} = b_{kk}$ ナル b_{ij} ノ system (b_{ij}) ヲ L－number ト名付ケ $\beta = (b_{ij})$ デアラハス。b_{ij} ヲ β ノ i, j－coordinate トイヒ $b_{ij} = (\beta)_{ij}$ トカク。

コノ定義ニ於テ β ハソノ一ツノ coordinate $(\beta)_{ij}$ デ定マルコトハ明カデアル。

コレカラ L－number ノ積ヲ考ヘル。積ハ簡單デアル。

定義10.[8] i) $(\beta)_{ij} \otimes (\gamma)_{jk} = (\delta)_{ik}$ ナル関係ニヨッテ δ ガ i, j, k ニ関係ナク一意的ニキマル。ソコデ $\delta = \gamma\beta$ ト定義スル。

ii) $(0)_{ij} = \mathfrak{a}_i$, $(1)_{ij} = \mathfrak{c}_{ij}$ ニヨッテ０及ビ１ヲ定義スル。

Lemma 7.

i) $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha = \gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$

ii) $\beta \cdot 0 = 0 \cdot \beta = 0$

iii) $\beta \cdot 1 = 1 \cdot \beta = \beta$

証明

i) Lemma 3 ニヨッテ明白。

ii) $(\beta \cdot 0)_{ik} = (\mathfrak{a}_i \cup (\beta)_{ik})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k) = \mathfrak{a}_i$

$(0 \cdot \beta)_{ik} = ((\beta)_{ij} \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k) = \mathfrak{a}_i$

iii) Lemma 5, iii) ニヨル。

次ニ L-number ノ和ヲ考ヘル。

定義11. $\sum \mathfrak{a}^{(j)} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \sum \mathfrak{b}^{(j)}$, $\mathfrak{a}^{(j)} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \mathfrak{b}^{(j)}$ トナルトキ之レヲ $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \cdots\cdots) \underset{\mathfrak{g}}{\sim} (\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \cdots\cdots)$ デアラハス。或ハ簡単ノタメ $(\mathfrak{a}^{(j)}) \underset{\mathfrak{g}}{\sim} (\mathfrak{b}^{(j)})$ トモカク。

定義12. $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cup \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{a} = 0$ ナルトキ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})\,l$ トカク。

Lemma 8.

i) $\mathfrak{a} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{g})\mathfrak{c} = 0$ ナラバ

$$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}$$

ii) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})\,l$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \underset{\mathfrak{g}}{\sim} (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$ ナルトキ

$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \underset{\mathfrak{g}}{\sim} (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}')$, $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}')\, l$ ナル $\mathfrak{c}'$ガ存在シテ一意的ニキマル。

証明 i) $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{g} = (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{g} = 0$,

$$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{g} = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} \cup \mathfrak{g}.$$

ii) $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \underset{\mathfrak{g}}{\sim} \mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}'$ ニヨッテ $\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ ニ $\mathfrak{c}' \leqq \mathfrak{a}' \cup \mathfrak{b}'$ ガ一意的ニ對應スル。

Lemma 9.[9] $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{z}, \mathfrak{q})\, l$, $(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{z} \cup \mathfrak{q})\mathfrak{a}_j = 0$ トスル。コノトキ $\mathfrak{u}_{ij}, \mathfrak{v}_{ij} \in L_{ij}$ ヲ任意ニ與ヘレバ

$$(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{q}) \underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} (\mathfrak{u}_{ij}\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{g}) \underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} (\mathfrak{v}_{ij}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{q}) \underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} (\mathfrak{w}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{g})$$

ニヨッテ $\mathfrak{g}, \mathfrak{y}$ 及ビ $\mathfrak{w} \in L_{ij}$ ガ定マル。コノ $\mathfrak{w}$ ヲ $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}} \mathfrak{v}_{ij}$ トカケバ（$\boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}}$ ノ定義!）

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}} \mathfrak{v}_{ij}$$
$$= ((\mathfrak{u}_{ij} \cup \mathfrak{z})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{q}) \cup (\mathfrak{v}_{ij} \cup \mathfrak{q})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z}))(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$

証明: $\mathfrak{w}$ ガキマルコトハ Lemma 8 ヨリ分ル。又 $\mathfrak{a}_i \underset{\mathfrak{a}_j}{\sim} \mathfrak{w}$ ナル故 $\mathfrak{w} \in L_{ij}$. 次ニ $\mathfrak{g} = (\mathfrak{u}_{ij} \cup \mathfrak{z})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{q})$.
$\mathfrak{y} = (\mathfrak{v}_{ij} \cup \mathfrak{q})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{z})$.
シカルニ $\mathfrak{w} = (\mathfrak{v}_{ij} \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{g} \cup \mathfrak{y})$
從ッテ $\mathfrak{w} = (\mathfrak{g} \cup \mathfrak{y})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$

Lemma 10. $(\alpha)_{ij} = (\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{c}_{ik}\mathfrak{a}_k} (\gamma)_{ij}$ ナル關係ハ i, j, k ニハ關係シナイ。

証明：$\left((\beta)_{ij} \boxplus_{c_{ik}\,a_k} (\gamma)_{ij}\right) P\begin{pmatrix} i & j & k \\ p & q & r \end{pmatrix}$

$$= (\beta)_{pq} \boxplus_{c_{pr}\,a_r} (\gamma)_{pq}$$

定義 13. Lemma 10 ニヨッテ

$(\alpha)_{ij} = (\beta)_{ij} \boxplus_{c_{ik} a_k} (\gamma)_{ij}$ ナルトキ $\alpha = \beta + \gamma$ ト定義スル。又簡単ノ為メ

$$(\beta)_{ij} \boxplus_k (\gamma)_{ij} = (\beta)_{ij} \boxplus_{c_{ik} a_k} (\gamma)_{ij} \text{ トスル。}$$

Lemma 11. $(a, x, b)l$, $(b, y, c)l$, $(a, b, c)\perp$ ナルトキ $(a, (x \cup y)(a \cup c), c)l$.

証明：$a \cdot (x \cup y)(a \cup c) = a(x \cup (a \cup b)y) = 0$

$$a \cup (x \cup y)(a \cup c) = a \cup c$$

Lemma 12. $(a_i\ z\ a)l$, $(a_i\ z'\ a')l$, $(a_i\ a_j\ a\ a')\perp$ ナラバ

i) $z = (z \cup z')(a \cup a')$ トオケバ

$$(a_i \cdot a_j\ z\ a)\ \widetilde{z}\ (a_i\ a_j\ z'\ a')$$

ii) $\tilde{u}_{ij} \boxplus_{za} v_{ij} = \tilde{u}_{ij} \boxplus_{z'a'} v_{ij}$

証明：i) Lemma 11 ニヨッテ $(a, z, a')l$,

故ニ $(a_i \cup a_j \cup a)\ \widetilde{z}\ (a_i \cup a_j \cup a')$

又明ラカニ $z \cup z = z' \cup z$

ii) 上ノ i) ニヨッテ容易ニ分ル。

Lemma 13[10] $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

証明：$\widetilde{a_j}$ ヲ $\widetilde{j}$ デアラハスコトニスル。

1) $(a_i\ c_{ik}\ a_k)\ \widetilde{j}\ ((\alpha)_{ij}\ c_{ik}\ x)\ \widetilde{j}\ ((\beta)_{ij}\ y\ a_k)$

$$\widetilde{j}\ ((\alpha + \beta)_{ij}\ y\ x)$$

2) $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{c}_{ik}\ \mathfrak{a}_k) \widetilde{\mathfrak{j}} (\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{y})$

ニヨッテ $\mathfrak{y}$ ヲ定メル。コノトキ $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{a}_j\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{a}_l) \perp$ ナル故

$$\boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{y}} = \boxplus_l = \boxplus_k$$

ソコデ $(\alpha+\beta)+\gamma$ ヲ $(\alpha+\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}} (\gamma)_{ij}$ デキメレバ 1), 2) ニヨッテ

3) $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{y}) \widetilde{\mathfrak{j}} ((\alpha+\beta)_{ij}\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{x}) \widetilde{\mathfrak{j}} ((\gamma)_{ij}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{q})$
$\widetilde{\mathfrak{j}} (((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{x})$

同様ニ $(\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{z}\mathfrak{q}} (\gamma)_{ij}$ ヲ作レバ 1), 2), 3) ヨリ

4) $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{y}) \widetilde{\mathfrak{j}} ((\beta)_{ij}\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{a}_k) \widetilde{\mathfrak{j}} ((\gamma)_{ij}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{y})$
$\widetilde{\mathfrak{j}} ((\beta+\gamma)_{ij}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{a}_k)$

従ッテ $((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij}$ ハ

5) $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{c}_{ik}\ \mathfrak{a}_k) \widetilde{\mathfrak{j}} ((\alpha)_{ij}\ \mathfrak{c}_{ik}\ \mathfrak{x}) \widetilde{\mathfrak{j}} ((\beta+\gamma)_{ij}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{a}_k)$
$\widetilde{\mathfrak{j}} ((\alpha+(\beta+\gamma))_{ij}\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{x})$

故ニ 2) ニヨッテ 3), 5) ヲ比スレバ

$$((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij} = (\alpha+(\beta+\gamma))_{ij}$$

$$\therefore\ (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

Lemma 14. i) $\beta+\gamma = \gamma+\beta$

ii) $0+\beta = \beta+0 = \beta$

iii) β ニ對シテ $\beta+\xi = 0$ ナル ξ ガ存在スル。

証明:

i) Lemma 12 ニ於テ $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_{ik}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}_l$, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{c}_{il}$ トレナ

$$(\beta)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{c}_{il}\mathfrak{a}_l} (\gamma)_{ij} = (\gamma)_{ij} \boxplus_{\mathfrak{a}_l\mathfrak{c}_{il}} (\beta)_{ij}$$

$$= (\gamma)_{ij} \text{田} \mathfrak{c}_{ik} \mathfrak{a}_k (\beta)_{ij}$$

ii) $(0)_{ij} = \mathfrak{a}_i$ ナル故

$$(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{a}_k) \underset{j}{\sim} ((0)_{ij} \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{a}_k) \underset{j}{\sim} ((\beta)_{ij} \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{a}_k)$$
$$\underset{j}{\sim} ((0+\beta)_{ij} \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{a}_k)$$

故ニ $\quad (0+\beta)_{ij} = (\beta)_{ij} \qquad 0+\beta = \beta$

$\therefore \quad \beta + 0 = 0 + \beta = \beta$

iii) $(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{a}_k) \underset{j}{\sim} ((\beta)_{ij} \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{a}_k) \underset{j}{\sim} (\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{g})$
$$\underset{j}{\sim} ((\xi)_{ij} \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{g})$$

ニヨツテ ξ ヲ定メル。コノトキ明カニ

$$(\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{a}_k) \underset{j}{\sim} ((\xi)_{ij} \quad \mathfrak{c}_{ik} \quad \mathfrak{g}) \underset{j}{\sim} ((\beta)_{ij} \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{a}_k)$$
$$\underset{j}{\sim} (\mathfrak{a}_i \quad \mathfrak{y} \quad \mathfrak{g})$$

故ニ $\quad (\xi+\beta)_{ij} = \mathfrak{a}_i \qquad \xi + \beta = 0$

定義 13. $\quad \mathfrak{u} \leqq \mathfrak{a}_j^m$ ナルトキ

$$\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij} = (\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})\, \mathfrak{a}_i^m$$

$$(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ji})\, \mathfrak{a}_i^m$$

Lemma 15.

i) $\quad (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}) \circ (\gamma)_{ij} = (\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij}) \cup (\mathfrak{v} \circ (\gamma)_{ij})$

ii) $\quad (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v}) \circ (\gamma)_{ij} \leqq (\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij}) \cdot (\mathfrak{v} \circ (\gamma)_{ij})$

iii) $\quad (\beta)_{ki} \circ (\gamma)_{ij} = (\gamma\beta)_{kj}$

iv) $\quad \mathfrak{a}_i \circ (\gamma)_{ij} \leqq \mathfrak{a}_j$

v) $\quad \mathfrak{u} \leqq \sum \mathfrak{a}_l \ (l \neq i, j)$ ナラバ $\mathfrak{u} \circ (\gamma)_{ij} = \mathfrak{u}$

vi) $\quad (\gamma)_{ik} \circ (\gamma)_{ij} \leqq \mathfrak{c}_{kj}$

証明:　i) $(\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m \cup (\mathfrak{v} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$

$$= ((\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m \cup \mathfrak{v} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$$
$$= ((\mathfrak{u} \cup (\gamma)_{ij})(\mathfrak{a}_i^m \cup (\gamma)_{ij}) \cup \mathfrak{v})\mathfrak{a}_i^m$$
$$= (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$$

vi) $((\gamma)_{ik} \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m = (((\gamma)_{ij} \cup \mathfrak{c}_{jk})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k) \cup (\gamma)_{ij})\mathfrak{a}_i^m$

$$= ((\gamma)_{ij} \cup \mathfrak{c}_{jk})((\gamma)_{ij} \cup \mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{a}_i^m$$
$$\leqq (\gamma)_{ij}\mathfrak{a}_i^m \cup \mathfrak{c}_{jk} = \mathfrak{c}_{jk}$$

ii), iii), iv), v) ハ定義ニヨリ明白.

Lemma 16.

i) $(\gamma)_{ji} \circ (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{v}) \geqq ((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u}) \cup ((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{v})$

ii) $(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{v} = ((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u})((\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{v})$

iii) $(\gamma)_{ji} \circ (\xi)_{ik} = (\xi\gamma)_{jk}$

iv) $(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j$

v) $\mathfrak{u} \leqq \sum \mathfrak{a}_l \ (l \neq i, j)$ ナルトキ $(\gamma)_{ji} \circ \mathfrak{u} \geqq \mathfrak{u}$

vi) $(\gamma)_{ji} \circ (\gamma)_{ki} \geqq \mathfrak{c}_{jk}$

証明:　i), iii), iv), v) ハ明白デアル.

ii) $((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{u})((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{v})\mathfrak{a}_i^m = ((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{u}((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{v}))\mathfrak{a}_i^m$

$$= ((\gamma)_{ji} \cup \mathfrak{u}\mathfrak{v})\mathfrak{a}_i^m$$

vi) $((\gamma)_{ji} \cup (\gamma)_{ki}) \cdot \mathfrak{a}_i^m = ((\mathfrak{c}_{jk} \cup (\gamma)_{ki})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i) \cup (\gamma)_{ki})\mathfrak{a}_i^m$

$$= (\mathfrak{c}_{jk} \cup (\gamma)_{ki})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i \cup (\gamma)_{ki})\mathfrak{a}_i^m$$
$$= (\mathfrak{c}_{jk} \cup (\gamma)_{ki})\mathfrak{a}_i^m \geqq \mathfrak{c}_{jk}$$

Lemma 17.　$\mathfrak{a} \overset{\frown}{\mathfrak{c}} \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ ナラバ $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

従ッテ特ニ $(\beta)_{ij} \leqq (\gamma)_{ij}$ ナラバ $\beta = \gamma$

証明:　$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) = \mathfrak{b}(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$

Lemma 18. $\xi(\beta+\gamma)=\xi\beta+\xi\gamma$

証明: $(\xi(\beta+\gamma))_{kj}=(\beta+\gamma)_{ki}\circ(\xi)_{ij}$

$$=((\beta)_{ki}\ \boxplus_l\ (\gamma)_{ki})\circ(\xi)_{ij}$$

$$=(((\beta)_{li}\cup((\gamma)_{ki}\cup a_l)(c_{kl}\cup a_i))(a_k\cup a_i))\circ(\xi)_{ij}$$

$$\leqq(((\xi\beta)_{lj}\cup((\xi\gamma)_{ki}\cup a_l)(c_{kl}\cup a_j))(a_k\cup a_j)$$

$$=(\xi\beta+\xi\gamma)_{kj}$$

Lemma 19.[17] $((\gamma)_{kj}\cup((\alpha)_{ij}\cup a_k)((\beta)_{ik}\cup a_j))(a_i\cup a_j)$

$$=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}$$

証明: i) $y=((\alpha)_{ij}\cup a_k)((\beta)_{ik}\cup a_j)$,

$w=((\gamma)_{kj}\cup y)(a_i\cup a_j)$ トオケバ

$$(a_i\ (\beta)_{ik}\ a_k)\ \underset{j}{\overline{\wedge}}\ ((\alpha)_{ij}\ y\ a_k)\ \underset{j}{\overline{\wedge}}\ (w\ y\ (\gamma)_{kj})$$

故ニ $w\in L_{ij}$.

ii) $w=w\circ(\gamma)_{kl}$

$$\leqq(c_{jl}\cup((\alpha)_{ij}\cup a_l)((\gamma\beta)_{il}\cup a_j))(a_i\cup a_j)$$

右辺ハ w ノ γ ヲ 1 デオキカヘタモノデアルカラ

$\in L_{ij}$

故ニ「$\leqq$」ハ「$=$」トナル。

$(\alpha+\gamma\beta)_{ij}=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}\circ(\gamma\beta)_{kl}$

$$=((\gamma\beta)_{kl}\cup((\alpha)_{ij}\cup a_k)(c_{ik}\cup a_j))(a_i\cup a_j)\circ(\gamma\beta)_{kl}$$

$$\leqq(c_{lj}\cup((\alpha)_{ij}\cup a_l)((\gamma\beta)_{il}\cup a_j))(a_i\cup a_j)$$

故ニ $w=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}$

Lemma 20. $(\beta+\gamma)\xi=\beta\xi+\gamma\xi$

証明: Lemma 19 ニヨッテ

$$((\beta+\gamma)\xi)_{ej} = (\xi)_{ei} \circ (\beta+\gamma)_{ij}$$
$$= (\xi)_{ei} \circ (c_{kj} \cup ((\beta)_{ij} \cup \alpha_k)((\gamma)_{ik} \cup \alpha_j))(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$\geqq (c_{kj} \cup ((\beta\xi)_{ej} \cup \alpha_k)((\gamma\xi)_{ek} \cup \alpha_j))(\alpha_e \cup \alpha_j)$$
$$= (\beta\xi + \gamma\xi)_{ej}$$

定理5. *L-number* ハ単位元 1 ヲ有スル *ring* ヲナス。

証明: *Lemma* 7, 13, 14, 18, 20 ヨリ明カデアル。

homogeneous basis $(\alpha_i;\ i=1,\cdots\cdots n)$ ニ於テ α_i ガ凡テ「点」ノ場合即チ「$\gamma < \alpha_i \longrightarrow \gamma = 0$」ナル場合ニハ, コレカラ作ツタ *L-number* ノ全体ハ「*shiefkärper*」ヲナス 証明: α_i ガ点デアルカラ $\beta \neq 0$ ナラバ $(\beta)_{ji} \in L_{ij}$. 故ニ $(\beta)_{ji} = (\gamma)_{ij}$ トオケバ

$$(\gamma\beta)_{ij} = ((\beta)_{ik} \cup (\gamma)_{kj})(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$= ((\beta)_{ik} \cup (\beta)_{jk})(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$= ((\beta)_{ik} \cup ((\beta)_{ik} \cup c_{ji})(\alpha_j \cup \alpha_k))(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$= ((\beta)_{ik} \cup c_{ji})(\alpha_i \cup \alpha_j) = c_{ij} = (1)_{ij}$$

同様ニシテ $(\beta\gamma)_{ij} = (1)_{ij}$

ソレ故 $\gamma\beta = \beta\gamma = 1$ 即チ $\gamma = \beta^{-1}$ トナル。

以下 *L-number* ノ作ル *ring* ヲ Γ デアラハス。

定義14. $(\beta)_m = ((\beta)_{jm} \cup \alpha_j)\alpha_m$

コノ定義ヨリ $(\beta)_m P\binom{m}{e} = (\beta)_e$ ハスグ分ル。

Lemma 21. $(\beta\gamma)_m \leqq (\beta)_m$

証明: $(\beta\gamma)_m = ((\beta\gamma)_{jm} \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{a}_m$

$$= (((\gamma)_{jk} \cup (\beta)_{km})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m) \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{a}_m$$

$$= (\mathfrak{a}_j \cup (\gamma)_{jk} \cup (\beta)_{km})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m)\mathfrak{a}_m$$

$$\leqq (\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_k \cup (\beta)_{km})\mathfrak{a}_m = (\mathfrak{a}_k \cup (\beta)_{km})\mathfrak{a}_m = (\beta)_m$$

Lemma 22. $\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{a}_m$ ナルトキ

$$(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km} \circ (\gamma)_{kj} = (\gamma)_{mj}(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_j)$$

証明: $(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km} \circ (\gamma)_{kj}$

$$= ((\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km} \cup ((\gamma)_{mj} \cup \mathfrak{c}_{km})(\mathfrak{a}_k \cup \mathfrak{a}_j))(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m)$$

$$= ((\gamma)_{mj} \cup \mathfrak{c}_{km})((\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km} \cup \mathfrak{a}_k \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m)$$

$$= ((\gamma)_{mj} \cup \mathfrak{c}_{km})(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_k \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m)$$

$$= ((\gamma)_{mj} \cup \mathfrak{c}_{km})(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_j)$$

$$= ((\gamma)_{mj} \cup \mathfrak{c}_{km}(\mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_j))(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_j)$$

$$= (\gamma)_{mj}(\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_j)$$

Lemma 23. $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_m \leqq \mathfrak{a}_m$ ニ對シテ $\mathfrak{u}_m = (\varepsilon)_m$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$ ナル ε ガ存在スル。

証明: i) $\mathfrak{v}_m \leqq \mathfrak{a}_m - \mathfrak{u}_m$ ヲ任意ニトツタトキ

$(\mathfrak{u}_m \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm} \cup \mathfrak{v}_m \in L_{mj}$ 何トナレバ

$$(\mathfrak{u}_m \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm} \cup \mathfrak{v}_m \cup \mathfrak{a}_j = \mathfrak{u}_m \cup \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{v}_m = \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_j.$$

$$((\mathfrak{u}_m \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm} \cup \mathfrak{v}_m)\mathfrak{a}_j = ((\mathfrak{u}_m \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm} \cup \mathfrak{v}_m(\mathfrak{u}_m \cup \mathfrak{a}_j))\mathfrak{a}_j = 0$$

故ニ $(\varepsilon)_{mj} = (\mathfrak{u}_m \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm} \cup \mathfrak{v}_m$ ニヨツテ ε ヲ

キメレバ

$$(\varepsilon)_j = ((\varepsilon)_{mj} \cup \mathfrak{a}_m)\mathfrak{a}_j = ((\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm} \cup \mathfrak{a}_m)\mathfrak{a}_j$$

$$= ((\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{jm} \cup \mathfrak{a}_m(\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{a}_j))\mathfrak{a}_j$$

$$= (\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{a}_j)(\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{c}_{jm})\mathfrak{a}_j$$

即チ $(\varepsilon)_j = \breve{\mathfrak{u}}_m P\binom{m}{j}$ 故ニ $(\varepsilon)_m = \breve{\mathfrak{u}}_m$

ii) $(\varepsilon^2)_{mj} = (\varepsilon)_{mk} \circ (\varepsilon)_{kj}$

$$= ((\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km} \cup \mathfrak{v}_m) \circ (\varepsilon)_{kj}$$

$$= ((\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{km} \circ (\varepsilon)_{kj}) \cup \mathfrak{v}_m$$

$$= (\varepsilon)_{mj}(\breve{\mathfrak{u}}_m \cup \mathfrak{a}_j) \cup \mathfrak{v}_m = (\varepsilon)_{mj}$$

(Lemma 22 ニヨル) 故ニ $\varepsilon^2 = \varepsilon$

Lemma 24. $(\alpha)_m \leqq (\beta)_m$ ナラバ $\alpha = \beta\gamma$ ナル γ ガ存在スル。

証明: $\mathfrak{v} \in \mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_k(\beta)_{kj}$ ヲ任意ニトル。コノトキ $\mathfrak{w} = ((\alpha)_{ij} \cup (\beta)_{kj})(\mathfrak{v} \cup \mathfrak{a}_i)$ トスル。

$$\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{a}_k = ((\alpha)_{ij} \cup (\beta)_{kj})\mathfrak{v}$$

$$= ((\alpha)_{ij}(\mathfrak{a}_k \cup \mathfrak{a}_j) \cup (\beta)_{kj})\mathfrak{v} = (\beta)_{kj}\mathfrak{v} = 0$$

$$\mathfrak{w} \cup \mathfrak{a}_k = ((\alpha)_{ij} \cup (\beta)_{kj})(\mathfrak{v} \cup \mathfrak{a}_i) \cup \mathfrak{v} \cup \mathfrak{a}_k(\beta)_{kj}$$

$$= ((\alpha)_{ij} \cup (\beta)_{kj} \cup \mathfrak{v})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k)$$

$$= ((\alpha)_{ij} \cup (\beta)_{kj} \cup \mathfrak{a}_k \cup \mathfrak{v})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k)$$

シカルニ $(\alpha)_{ij} \cup (\beta)_{kj} \cup \mathfrak{a}_k \cup \mathfrak{v}$

$$\geqq (\alpha)_{ij} \cup (\alpha)_{kj} \cup \mathfrak{a}_k \cup \mathfrak{v} \geqq \mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k$$

故ニ $\mathfrak{w} \in L_{ik}$ ナトルコトガ分ッタ。ソコデ $\mathfrak{w} = (\gamma)_{ik}$ トオケバ

$$(\beta\gamma)_{ij} = (\mathfrak{v} \cup (\beta)_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$
$$= ((\beta)_{kj} \cup (\alpha)_{ij}(\mathfrak{v} \cup \mathfrak{a}_i \cup (\beta)_{kj}))(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$
$$= (\alpha)_{ij}(\mathfrak{v} \cup \mathfrak{a}_i \cup (\beta)_{kj}) \leqq (\alpha)_{ij} \qquad \therefore\ \alpha = \beta\gamma$$

定理6. γ ハ regular ring デアッテ $R_\gamma \cong L(\mathfrak{a}_k)$

証明: regular ring トナルコトハ Lemma 23 ヨリ分ル。

又 Lemma 21, 24 ヨリ $(\beta)_k$ ト $(\beta)_\gamma$ トハ一對一ニ對應シテ且ツ $(\beta)_k \geqq (\gamma)_k \longleftrightarrow (\beta)_\gamma \geqq (\gamma)_\gamma$ トナル。故ニ $R_\gamma \cong L(\mathfrak{a}_k)$.

§4[12] 補助定理

Lemma 25. $\mathfrak{u}_k \leqq \mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{v}_k \leqq \mathfrak{a}_k - \mathfrak{u}_k$ トシテ $(\varepsilon)_{kj} = (\mathfrak{u}_k \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{kj} \cup \mathfrak{v}_k$, $(\bar{\varepsilon})_{ik} = (\mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{u}_i$ ニヨッテ ε, $\bar{\varepsilon}$ ヲ作レバ $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 1$. (但シ $\mathfrak{u}_i = \mathfrak{u}_k P\binom{k}{i}$).

証明: Lemma 19 ニヨッテ

$$(\varepsilon + \bar{\varepsilon})_{ij} = (((\bar{\varepsilon})_{ik} \cup \mathfrak{a}_j)((\varepsilon)_{ij} \cup \mathfrak{a}_k) \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$
$$= (((\mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)((\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup \mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_k) \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$
$$= ((\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup (\mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik} \cup (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)(\mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_k) \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$
$$= (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup ((\mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_k)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{c}_{kj})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j)$$
$$= (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} \cup (\mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij} = (\mathfrak{u}_i \cup \mathfrak{v}_i \cup \mathfrak{a}_j)\mathfrak{c}_{ij}$$

$-\mathfrak{c}_{ij}-(1)_{ij}$.

Lemma 26. $\mathfrak{u}_k \leqq \mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{v}_k \leqq \mathfrak{a}_k - \mathfrak{u}_k$, $\mathfrak{u}_k = (\beta)_k$, $\mathfrak{v}_k = (1-\beta)_k$, $\beta^2 = \beta$ トスレバ

i) $(\xi\beta)_{kj} = (\xi)_{kj}(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{u}_k) \cup \mathfrak{v}_k$

ii) $(\beta\xi)_{jk} = (\mathfrak{v}_k \cup (\xi)_{jk})(\mathfrak{u}_k \cup \mathfrak{a}_j)$

証明: i) $(\xi\beta)_{kj} = (\beta)_{ki} \circ (\xi)_{ij}$

$= ((\mathfrak{u}_k \cup \mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik} \circ (\xi)_{ij}) \cup \mathfrak{v}_k$

$= (\xi)_{kj}(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{u}_k) \cup \mathfrak{v}_k$ (Lemma 22 ニヨル)

ii) $(\beta\xi)_{jk} = ((\beta\xi)_{ji} \cup \mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_k)$

$= (((\xi)_{jk} \cup (\beta)_{ki})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i) \cup \mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_k)$

$= (((\xi)_{jk} \cup (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{v})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i)$

$\cup (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_k)$

$= (((\xi)_{jk} \cup (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik} \cup \mathfrak{v})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i \cup (\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik})$

$\cup \mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_k)$

$= ((\mathfrak{u} \cup \mathfrak{a}_i)\mathfrak{c}_{ik} \cup ((\xi)_{jk} \cup \mathfrak{v})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{u}) \cup \mathfrak{c}_{ik})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_k)$

$= (\mathfrak{v} \cup (\xi)_{jk})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{u})$.

定義 15.[13] $(\beta;\gamma^1,\cdots\cdots,\gamma^{m-1}) = (\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\beta)_m)\prod_{j=1}^{m-1}(\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\gamma^j)_{mj})$

注意. 定理3ノ系ニヨレバ任意ノ元 $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}^m$ ハ

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\mathfrak{a}^{m-1} \cup \mathfrak{b}_m)\prod_{j=1}^{m-1}(\mathfrak{a}_j^{m-1} \cup \mathfrak{b}_{mj})$$

ナル形ニ分解サレル。

$\mathfrak{b}_m = (\beta)_m$, $\mathfrak{b}_{mj} = (\gamma^j)_{mj}$ ナル $\beta, \gamma^1, \cdots\cdots \gamma^{m-1}$

ヲトレバ，上ノ式ノ第二項ハ

$$(\alpha^{m-1} \cup (\beta)_m) \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j^{m-1} \cup (\gamma^j)'_{mj})$$

トカカレル。 之レヲ簡単ノタメ $(\beta; \gamma', \ldots\ldots, \gamma^{m-1})$ デ表ハスノデアル。

Lemma 27. $\beta^2 = \beta$ ナラバ

$$\alpha_m \cup (\beta;\ \gamma', \ldots\ldots, \gamma^{m-1}) = \alpha_m \cup (1;\ \gamma'\beta, \ldots\ldots, \gamma^{m-1}\beta)$$

証明： Lemma 26, i) 及ビ Lemma 1, iii) ニヨッテ

$$(1;\ \gamma'\beta, \ldots\ldots, \gamma^{m-1}\beta) = \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i\beta)_{mi})$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{mi} (\alpha_i \cup (\beta)_m) \cup (1-\beta)_m)$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{mi} (\alpha_i \cup (\beta)_m)) \cup (1-\beta)_m$$

然ルニ $(\beta;\gamma', \ldots\ldots, \gamma^{m-1}) = \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup \alpha_i \cup (\beta)_m)(\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{mi})$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{mi} (\alpha_m \cup \alpha_i)(\alpha_i^{m-1} \cup \alpha_i \cup (\beta)_m))$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{mi} (\alpha_i \cup (\beta)_m))$$

故ニ $(1:\ \gamma'\beta, \ldots\ldots, \gamma^{m-1}) = (\beta;\ \gamma', \ldots\ldots, \gamma^{m-1}) \cup (1-\beta)_m$.

コヽデ両辺ニ α_m ヲ加ヘレバヨイ。

Lemma 28. $(\alpha_k \cup (\beta)_{ij})(\alpha_i \cup (\gamma)_{jk}$

$$= (\alpha_k \cup (\beta)_{ij})(\alpha_j \cup (-\gamma\beta)_{ik})$$

証明： Lemma 19 ニヨッテ

$$((\gamma)_{jk} \cup ((-\gamma\beta)_{ik} \cup \alpha_j)((\beta)_{ij} \cup \alpha_k))(\alpha_i \cup \alpha_k) = \alpha_i$$

両辺ニ $(\gamma)_{jk}$ ヲ加ヘレバ

$$(\gamma)_{jk}\cup((-\gamma\beta)_{ik}\cup\alpha_j)((\beta)_{ij}\cup\alpha_k)=\alpha_i\cup(\gamma)_{jk}$$

両辺ニ $(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$ ヲカケレバ

$$((-\gamma\beta)_{ik}\cup\alpha_j)((\beta)_{ij}\cup\alpha_k)\cup(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$$
$$=(\alpha_i\cup(\gamma)_{jk})(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$$

ココデ $(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})=(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup\alpha_j)(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$

$$=(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup(\beta)_{ij}(\alpha_k\cup\alpha_j))=(\gamma)_{jk}\alpha_k=0.$$

故ニ Lemma ノ式ヲ得ル。

Lemma 29. $\alpha_{1i}^{m}=\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j$ トスレバ

$$\alpha_m\cup(1;\ \gamma',\ \eta^2\gamma',\ \cdots\cdots,\ \eta^{m-1}\gamma')$$
$$=\alpha_m\cup(\alpha_1^{m-1}\cup(\gamma^2)_1)\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup(-\eta^i)_{1i})$$

証明： $n\geqq m>2$ トスル.

$$(1;\ \gamma^1,\ \eta^2\gamma',\ \cdots\cdots,\ \eta^{m-1}\gamma')$$
$$=(\alpha_1^{m-1}\cup(\gamma')_{m1})\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup(\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_1\cup(\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup(\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_1\cup(\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup(\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_m\cup(-\eta^i)_{1i})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_m\cup(-\eta^i)_{1i})$$

$$\alpha_m\cup(1;\ \gamma',\ \eta^2\gamma',\ \cdots\cdots\ \eta^{m-1}\gamma')$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^m \cup (\gamma')_{m1} \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\gamma')_{m1} \cup \mathfrak{a}_m \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^m \cup (\gamma')_1 \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup (\gamma')_1 \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^{m-1} \cup (-\eta^i)_{1i} \right) \right.$$

$m=2$ ノトキハ $\mathfrak{a}_2 \cup (1;\gamma') = \mathfrak{a}_2 \cup (\gamma')_{21} = \mathfrak{a}_2 \cup (\gamma')_1$

Lemma 30.

$$\mathfrak{a}_m \cup (1;\, 0,\, \varepsilon^2, \dots\dots, \varepsilon^{m-1})$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{1i}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{1i} \right) \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

証明: $\mathfrak{a}_m \cup (1;\, 0,\, \varepsilon^2, \dots\dots, \varepsilon^{m-1})$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^m \prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_i^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left(\mathfrak{a}_1^{m-1} \cup \mathfrak{a}_m \right) \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i,1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_m \right)$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \left[\mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i,1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_m \right) \right] P \begin{pmatrix} 2 \cdots\cdots m-1 & m \\ 2 \cdots\cdots m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathfrak{a}_m \cup \mathfrak{a}_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\mathfrak{a}_{i,1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \mathfrak{a}_1 \right)$$

Lemma 31.

$$\mathfrak{a}_m \cup (1;\, \gamma', \dots\dots, \gamma^{m-1}) = \mathfrak{a}_m \cup (1;\, \gamma',\, \eta^2\gamma', \cdots$$
$$\cdots, \eta^{m-1}\gamma') \cup (1;\, 0,\, \varepsilon^2, \dots\dots\, \varepsilon^{m-1})$$

但シ $(\gamma')_e=(\beta)_e$, $\beta^2=\beta$; $\gamma^i\beta=\eta^i\gamma'$,

$\gamma^i(1-\beta)=\varepsilon_i$

証明: $\mathfrak{a}_m\cup(1;\gamma',\text{------},\gamma^{m-1})$

$=\mathfrak{a}_m\cup(1;\gamma'\beta,\text{-----},\gamma^{m-1}\beta)\cup(1;\gamma'(1-\beta),\text{-----}\gamma^{m-1}(1-\beta))$

$=\mathfrak{a}_m\cup(1;\gamma',\eta^2\gamma',\text{-----},\eta^{m-1}\gamma')\cup(1;0,\varepsilon^2,\text{-----},\varepsilon^{m-1})$

定理 7.[(ト)] $(\beta)_r=(\bar\beta)_r$, $\bar\beta^2=\bar\beta$; $(\gamma'\bar\beta)_e=(\beta^*)_e$, $\beta^{*2}=\beta^*$; $\gamma^i\bar\beta\beta^*=\eta^i\gamma'\bar\beta$, $\varepsilon_i=\gamma^i\bar\beta(1-\beta^*)$ トオケバ

$$\mathfrak{a}^{m-1}(\mathfrak{a}_m\cup(\beta;\gamma',\text{-----}\gamma^{m-1}))$$

$$=\left(\mathfrak{a}_1^{m-1}\cup(\gamma'\bar\beta)_1\right)\prod_{i=2}^{m-1}\left(\mathfrak{a}_1^{m-1}\cup(-\eta^i)_{1i}\right)\cup\mathfrak{a}_1^{m-1}\left(\prod_{i=2}^{m-1}\left(\mathfrak{a}_1^{m-1}\cup(\varepsilon^i)_{1i}\right)\cup\mathfrak{a}_1\right)$$

証明: $\mathfrak{a}_m\cup(\beta;\gamma',\text{-----}\gamma^{m-1})=\mathfrak{a}_m\cup(1;\gamma'\bar\beta,\text{-----}\gamma^{m-1}\bar\beta)$

$=\mathfrak{a}_m\cup(1;\gamma'\bar\beta,\eta^2\gamma'\bar\beta,\text{-----},\eta^{m-1}\gamma'\bar\beta)\cup(1;0,\varepsilon^2,\text{-----},\varepsilon^{m-1})$

$$=\mathfrak{a}_m\cup\left(\mathfrak{a}_1^{m-1}\cup(\gamma'\bar\beta)_1\right)\prod_{i=2}^{m-1}\left(\mathfrak{a}_1^{m-1}\cup(-\eta^i)_{1i}\right)$$

$$\cup\,\mathfrak{a}_1^{m-1}\left(\prod_{i=2}^{m-1}\left(\mathfrak{a}_1^{m-1}\cup(\varepsilon^i)_{1i}\right)\cup\mathfrak{a}_1\right)$$

コノ両辺ニ $\mathfrak{a}^{m-1}$ ヲカケレバ定理ノ式ヲ得ル。

—— (ツヅク) ——