737. Fourier 級數ニ就イテ

泉　信一
河田龍夫 (東北大)

1. $f(x)$ ハ 2π ヲ週期トスル可積分函數トシ，ソノ Fourier 級數ヲ

$$(1.1)\quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

トスル．(1.1) ノ部分和及ビ第一次平均ヲ $S_n(x)$ 及ビ $\sigma_n(x)$ デ表ハ．最近 A. Zygmund (Fund. Math., 30 (1938)) ガ級數

$$(1.2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^2}{n}$$

ノ收斂カラ色々ノ面白イ結果ヲ導イテヰル。

吾々ハコヽデ (1.2) ヨリモ更ニ一般ナ級數

$$(1.3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^p}{n}$$

ヲ考ヘル。之レト關聯シテ

$$(1.4)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - f(x)|^p}{n}$$

ナル級數ガ考ヘラレル。(1.4) ノ方ハ (1.3) ヨリモ收斂問題等ハ困難ナ様デアル，

吾々ハ前ニ Notes on Fourier series (V)，東北數學雜誌，34 (1938) ニ於テ (1.4) ノ收斂ニ關シテ次ノ結

果ヲ得タ。

定理. $p>1$, $\delta<p-1$ 及ビ $\alpha p>1$ トスル。モシ

$$(1.5)\qquad a_n\log^\alpha n,\quad b_n\log^\alpha n\qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ガ L^p ニゾクスル函数ノ Fourier 係数デ且ツ

$$(1.6)\qquad \int_t^\pi \frac{\phi(u)}{u}\,du = O\left(|\log t|^\delta\right),$$

$$\phi(u)=\phi(x,u)=f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$$

ガ集合 E ニ於テ成立シテヰルナラバ，(1.4) ハ E ノ殆ンドスベテノ点デ収斂スル。

ココニノベル結果ハ (1.4) ヲ (1.3) デオキカヘルトキニハ，(1.6) ニ関スル條件ハ不用ニナルコトデアル。更ニ之ヲ一般ニシテ (1.5) ガ H ニゾクスル函数ノ Fourier 級数デアッテモヨイコトヲ証明スル（定理3）。最後ニ之等ノ問題ニ関係シタ二三ノ不等式定理ヲ証明スル。

2. 定理1. $1<p\le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ トスレバ

$$(2.1)\qquad \left\{\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{|S_n-\sigma_n|^q}{n}\right)dx\right\}^{\frac{1}{q}} \le C\left\{\sum_{n=1}^\infty \left(|a_n|^p+|b_n|^p\right)\log^{\alpha p} n\right\}^{\frac{1}{p}}$$

従ッテ、右辺ガ有限ナトキ

$$(2.2)\qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{|S_n-\sigma_n|^q}{n}$$

ハ殆ンドスベテノ点デ収斂スル。

之レヲ証明スルタメニ，次ノ Young-Hausdorff ノ定理ヲ用ヒル。

定理A. $1<p\le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ トスル。モシ $f(x)\in L^q$

ナラバ

$$\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} \leqq C\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^p+|b_n|^p\right)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

定理1ノ証明。　$S_n = S_n(x)$ 及ビ $\sigma_n = \sigma_n(x)$ ノ

定義カラ

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} \nu A_\nu(x) \tag{2.3}$$

定理Aニ於ケル $f(x)$ ヲ上ノ函数ニトルトキ

$$\int_0^{2\pi}|S_n-\sigma_n|^q dx = \int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu A_\nu(x)\right|^q dx$$

$$\leqq C\,\frac{1}{n^q}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p\left(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\right)\right\}^{\frac{q}{p}}$$

$$\leqq C\,\frac{1}{n^q}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu^p}{\log^{\alpha p}\nu}\left(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\right)\log^{\alpha p}\nu\right\}^{\frac{q}{p}}$$

$$\leqq \frac{C}{\log^{\alpha p} n}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\right)\log^{\alpha p}\nu\right\}^{\frac{q}{p}}$$

故ニ

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|S_n-\sigma_n|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqq C\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\alpha q} n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\left(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\right)\log^{\alpha p}\nu\right)^{\frac{q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqq C\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\right)\log^{\alpha p}\nu\right\}^{\frac{1}{p}}$$

故ニ求ムル結果ヲウル。

3. 次ニ定理1ヲ次ノヤウニ一般ニ出來ル。

定理2. $p>1$, $\alpha p>1$ トスル、モシ

(3.1) $a_n \log^\alpha n$, $b_n \log^\alpha n$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$

ガ L^p ノ函數 $g(x)$ ノ Fourier 係數ナラバ

(3.2) $$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|S_n(x)-\sigma_n(x)|^p}{n}\right)dx \leqq C\int_0^{2\pi}|g(x)|^p dx$$

特ニ左邊ノ integrand (1.3) ガ殆ンドスベテノ點デ收斂スル。

之ヲ證明スルタメニ次ノ定理ヲ用ヒル。

定理B. $p>1$ 及ビ $f(x)\in L^p$ ナラバ

$$\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p dx \leqq C\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx$$

定理C. (Hardy-Littlewood). $p>1$ 及ビ $f(x)\in L^p$ ナラバ

$$\int_0^{2\pi}\left\{\max_{1\leqq k\leqq n}|\sigma_k(x)|\right\}^p dx \leqq C\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx$$

定理2ノ證明: (2,3) 及ビ Abel's lemma カラ

$$S_n-\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu A_\nu(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu}{\log^\alpha \nu}\cdot A_\nu(x)\log^\alpha \nu$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1}\Delta\left(\frac{\nu}{\log^\alpha \nu}\right)\sum_{\mu=1}^{\nu}A_\mu(x)\log^\alpha \mu$$

$$+\frac{1}{n+1}\frac{n}{\log^\alpha n}\sum_{\mu=1}^{n}A_\mu(x)\log^\alpha \mu$$

$$=I_1+I_2$$

トオク．故ニ

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n-\sigma_n|^p}{n}\right)dx \leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|I_1|^p dx$$

$$+C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|I_2|^p dx = J_1 + J_2$$

トオク、$g(x)$ ノ Fourier 級数ノ部分和ヲ $t_n(x)$ トオクトキ

$$J_2 \leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\alpha p} n}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mu=1}^{n}A_\mu(x)\log^\alpha \mu\right|^p dx$$

$$= C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\alpha p} n}\int_0^{2\pi}|t_n(x)|^p dx$$

故ニ (2.1) ニ関スル條件定理 B 及ビ $\alpha p>1$ カラ

$$J_2 \leqq C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\alpha p} n}\int_0^{2\pi}|g(x)|^p dx \leqq C\int_0^{2\pi}|g(x)|^p dx$$

又，abel's lemma ニヨリ．

$$J_1 \leqq C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\Delta\left(\frac{\nu}{\log^\alpha \nu}\right)\sum_{\mu=1}^{\nu}A_\mu(x)\log^\alpha \mu\right|^p dx$$

$$\leqq C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\Delta^2\left(\frac{\nu}{\log^\alpha \nu}\right)\nu\tau_\nu(x)\right|^p dx$$

$$+C\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\int_0^{2\pi}\left|\Delta\left(\frac{n-1}{\log^\alpha(n-1)}\right)(n-1)\tau_{n-1}(x)\right|^p dx$$

コヽニ $\tau_\nu(x)$ ハ $g(x)$ ノ Fourier 級数ノ第一次平均デアル.

$$J_1 \leqq C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\int_0^{2\pi}\left(\max_{1\leqq\nu\leqq n}|\tau_\nu(x)|\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\log^{\alpha+1}\nu}\right)^p dx$$

$$+C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\alpha p}n}\int_0^{2\pi}|\tau_{n-1}(x)|^p dx$$

故ニ定理Cカラ

$$J_1\leqq C\int_0^{2\pi}|g(x)|^p dx$$

4. 更ニ定理2ヲ一般ニスル。ソノ主ナ点ハZygmundノ定理ヲ用ヒルコトデアル。

$f(x)$トソノ共軛函数が可積分ナルトキ，$f(x)$ハH-classニゾクスルトイヒ，$f(x)\varepsilon H$トカク。従ッテH-classハ$L^p\ (p>1)$ヨリ広クLヨリ狭イ。

定理3.

$$(4.1)\qquad 0<p\leqq 2,\quad \alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{2}$$

又ハ

$$(4.2)\qquad p\geqq 2,\quad \alpha\geqq 1-\frac{2}{p}$$

トスル，モシ

$$(4.3)\qquad a_n\log^{\alpha}n,\quad b_n\log^{\alpha}n\quad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

がH-classノ函数ノFourier係数ナラバ，級数

$$(4.4)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|S_n-\sigma_n|^p}{n}$$

が殆ンドスベテノ点デ収斂スル。

$$(4.5)\qquad p>2,\ 2\geqq q\geqq 1,\ \alpha\geqq\frac{p-2}{pq}$$

デヨッ(4.3)がL^qノ函数ノFourier係数ナラバ，(4.4)ハ殆ンドスベテノ点デ収斂スル。

之レヲ証明スルタメニ次ノ定理ヲ用ヒル。

定理D. $1 \leqq p \leqq 2$. $f(x) \in L^p$ ナラバ殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$|S_n(x)| = o(\log^{\frac{1}{p}} x)$$

$p=1$, $p=2$ ノ場合ハヨク知ラレテヰル。$1<p<2$ ノ場合ハ Littlewood-Paley ニ負フモノデアル。

定理E (Zygmund) $f(x) \in H$ ナラバ，殆ンドスベテノ x ニ對シテ級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^2}{n}$$

ガ收斂スル。

定理3ノ証明: 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \log^{\alpha} n$$

ノ部分和及ビ第一項平均ヲ $t_n(x)$, $\tau_n(x)$ デ表ハストキ，

Abel's lemma カラ

$$S_n(x)\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} \nu A_\nu(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\log^{\alpha}\nu}\cdot \nu A_\nu(x)\log^{\alpha}\nu$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta\left(\frac{1}{\log^{\alpha}\nu}\right)\sum_{\mu=1}^{\nu} \mu A_\mu(x)\log^{\alpha}\mu$$

$$+ \frac{1}{(n+1)\log^{\alpha} n}\sum_{\mu=1}^{n} \mu A_\mu(x)\log^{\alpha}\mu$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta\left(\frac{1}{\log^{\alpha}\nu}\right)(\nu+1)\left\{t_\nu(x) - \tau_\nu(x)\right\} + \frac{1}{\log^{\alpha} n}\left\{t_n(x) - \tau_n(x)\right\},$$

$$|s_n(x)-\sigma_n(x)| \leqq C\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|t_\nu(x)-\tau_\nu(x)|}{\log^{\alpha+1}\nu}+\frac{1}{\log^\alpha n}|t_n(x)-\tau_n(x)|$$

$$= J_1 + J_2$$

トオク．Cauchy ノ不等式カラ

$$J_1 \leqq \frac{C}{n}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|t_\nu(x)-\tau_\nu(x)|^2}{\nu}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu}{\log^{2(\alpha+1)}\nu}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \frac{C}{\log^{\alpha+1}n}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{|t_\nu(x)-\tau_\nu(x)|^2}{\nu}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

右辺ノ和ハ定理 E カラ殆ンドスベテノ点デ有限デ，$<D^2(x)$.

故ニ殆ンドスベテノ x ニ対シテ

$$J_1 \leqq \frac{CD(x)}{\log^{\alpha+1}n}$$

$(\alpha+1)p>1$ カラ

$$(4.6)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|J_1|^p \leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^{(\alpha+1)p}n}<\infty.$$

今、(4.1) が成立シテアルトスル．Hölder's inequality カラ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|J_2|^p \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^{\alpha p}n}|t_\nu-\tau_\nu|^p$$

$$\leqq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|t_n-\tau_n|^2}{n}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{2\alpha p/(2-p)}}\right)^{2/(2-p)}$$

右辺ノ第一項ハ定理Eカラ殆ンドスベテノ点デ有限デ，第二項ハ (4.1) カラ有限デアル。

故ニ (4.6) ト合セテ，求ムル結果ヲ得ル。

次ニ (4.2) ガ成立シテヰルトスルトキ, 定理Dカラ殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|J_2|^p \leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|t_n-\tau_n|^2}{n}\frac{|t_n-\tau_n|^{p-2}}{\log^{\alpha p} n}$$

$$\leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|t_n-\tau_n|^2}{n}\frac{\log^{p-2} n}{\log^{\alpha p} n}\leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|t_n-\tau_n|^2}{n}$$

故ニ定理Eカラ求ムル結果ヲシル。

最後ニ (4.5) ガ満サレテヰルトスル、(4.3) ヲ Fourier 係數トスル函數ガ L^q ニゾクスルトスル、コノトキモ (4.6) ガ成立スル。更ニ定理Dカラ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|J_2|^p \leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|t_n-\tau_n|^2}{n}\frac{(\log n)^{(p-2)/q}}{\log^{\alpha p} n}$$

$$\leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|t_n-\tau_n|^2}{n}$$

故ニ求ムル結果ヲ得ル。

5. 定理4. α 及ビ p ガ (4.1) 又ハ (4.2) ヲ満足スルトスル。(4.3) ガ H-class ノ函數ノ Fourier 係數ナラバ, 級數

$$(5.1)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}|s_{n_k}-\sigma_{n_k}|^p$$

ガ殆ンドスベテノ點デ收斂スル。但シ

$$(5.2)\qquad n_{k+1}/n_k>\theta>1 \qquad (k=1,2,\text{-----})$$

トスル。

又 α, p, q ガ (4.5) ヲ満足シ且ツ (4.3) ガ L^q ノ函

数ノ Fourier 係数ナラバ, (5.1) ハ殆ンドスベテノ点デ収斂スル。

之レヲ証明スルノニ上ノ定理 D, E ノ外ニ次ノ定理ヲ用ヒル。

定理 F. $f(x) \in H$ 及ビ $\{n_k\}$ ガ (5.2) ヲ満足スルトキ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| s_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x) \right|^2$$

ガ殆ンドスベテノ点デ収斂スル。

定理4ノ証明. 定理3ノ場合ト同様ニ

$$\left| s_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x) \right| \leqq \frac{C}{n_k} \sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{|t_\nu(x) - \tau_\nu(x)|}{\log^{\alpha+1} \nu}$$

$$+ \frac{C}{\log^{\alpha} n_k} \left| t_{n_k}(x) - \tau_{n_k}(x) \right|$$

$$= L_1 + L_2$$

トオク、然ルトキ

$$L_1 \leqq \frac{C}{\log^{\alpha+1} n_k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{|t_\nu(x) - \tau_\nu(x)|^2}{\nu} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_1^p \leqq C \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|t_\nu(x) - \tau_\nu(x)|^2}{\nu} \right\}^{\frac{p}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log^{\alpha+1} n_k}$$

$n_{k+1}/n_k > \theta > 1$ カラ $n_k > \theta^k$.

故ニ $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \log^{-(\alpha+1)} n_k \leqq \sum_{k=1}^{\infty} 1/\{k^{(\alpha+1)} \log \theta\} < \infty$

故ニ右辺ハ殆ンドスベテノ点デ有界デアル。

又、(4.1)ガ満足サレテヰルトキ Hölder ノ不等式カラ

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^p \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|t_{n_k}-\tau_{n_k}|^2\right)^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n_k)^{2\alpha p/(2-p)}}\right)^{\frac{2-p}{2}}$$

右辺ハ定理F及ビ $2\alpha p/(2-p)>1$ カラ殆ンドスベテノ点デ有限デアル。残リノ部分モ同様ニ出来ル。

6. 次ニ定理ノト関聯シテ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 5.

(6.1) $\quad 1<p\leqq 2, \quad p^{-1}+q^{-1}=1$

トスルトキ

$$(6.2)\ \left\{\int_0^{2\pi}dx\int_0^{2\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|^q}{t}\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqq C\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)\log n\right\}^{\frac{1}{p}}$$

コノ定理ハ $p=2$ ノトキハ (6.2) ニ於テ $C=1$ デ、不等号ガ等号デオキカヘラレルコトガ証明サレテヰル (Plessner, Crelle's Journ., 1925)

定理5ノ証明

$$(6.3)\quad f(x+t)-f(x-t)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt-a_n\sin nt)\sin nx$$

故ニ定理Aカラ

$$\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^q dx \leqq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)|\sin nt|^p\right)^{q/p},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^q dx$$

$$\leqq C\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)\,|\sin nt|^p\right)^{q/p}$$

$$\leqq C\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\left(\sum_{n=1}^{[\frac{1}{t}]}(|a_n|^p+|b_n|^p)\,|\sin nt|^p\right)^{q/p}$$

$$+\,C\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\left(\sum_{n=[\frac{1}{t}]+1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)\,|\sin nt|^p\right)^{q/p}=I_1+I_2$$

トオク。I_1 ニ於テ $|\sin nt|\leqq nt\leqq 1$. 故ニ

$$I_1\leqq\int_0^{2\pi}t^{q-1}\left(\sum_{n=1}^{[\frac{1}{t}]}(|a_n|^p+|b_n|^p)n^p\right)^{q/p}dt$$

$$\leqq\int_0^{2\pi}t^{q-1}\left(\sum_{n=1}^{[\frac{1}{t}]}(|a_n|^p+|b_n|^p)\log n\cdot\frac{n^p}{\log n}\right)^{q/p}dt$$

$$\leqq\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t(\log\frac{1}{t})^{q/p}}\left(\sum_{n=1}^{[\frac{1}{t}]}(|a_n|^p+|b_n|^p)\log n\right)^{q/p}$$

$$\leqq C\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)\log n\right\}^{q/p}$$

$$I_2\leqq\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\left(\sum_{[\frac{1}{t}]+1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)\right)^{q/p}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\left(\sum_{[\frac{1}{t}]+1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)\log n\cdot\frac{1}{\log n}\right)^{q/p}$$

$$\leqq\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t(\log\frac{1}{t})^{q/p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^p+|b_n|^p)\log n\right)^{q/p}$$

故ニ (6.2) ヲ得ル。

定理6. (6.1) ノ下デ

$$(6.4)\quad \int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|\,dt \geqq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{q}-1}(|a_n|^p+|b_n|^p).$$

定理 G.（Young-Hausdorff）. 條件（6.1）ノ下デ

$$\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \geqq C\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^q+|b_n|^q)\right\}^{\frac{1}{q}}$$

定理 H.（Hardy）. $K \leqq 1,\ r>1$ トシ

$$(6.5)\quad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

トオクトキ

$$\int_0^{\infty}(xt)^K\frac{dx}{x^r} \leqq C\int_0^{\infty}F^K\frac{dx}{x^r}$$

定理6ノ証明.（6.3）及ビ定理Gカラ

$$\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^p dx \geqq C\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^q+|b_n|^q)|\sin nt|^q\right\}^{p/q},$$

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^p dx$$

$$\geqq C\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^q+|b_n|^q)|int|^q\right\}^{p/q}$$

$$\geqq C\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t}\left\{\sum_{n=1}^{[\frac{1}{t}]}(|a_n|^q+|b_n|^q)|int|^q\right\}^{p/q}$$

$$\geqq C\int_0^{2\pi}\frac{dt}{t^{1-p}}\left\{\sum_{n=1}^{[\frac{1}{t}]}(|a_n|^q+|b_n|^q)n^q\right\}^{p/q}$$

$\tau=\frac{1}{t}$ トオクトキ

$$J \geqq C\int_{1/(2\pi)}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{p+1}}\left\{\sum_{n=1}^{(\tau)}(|a_n|^q+|b_n|^q)n^q\right\}^{p/q}$$

$p/q \leqq 1$. $p+1>1$ ナル事カラ，定理H＝ヨリ

$$J \geqq C\int_{1}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{p+1}}\left\{(|a_n|^q+|b_n|^q)n^q\cdot n\right\}^{p/q}$$

$$\geqq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{p}{q}-1}(|a_n|^p+|b_n|^p).$$

故＝ (6.4) ヲ得ル。

定理7. (6.1) ノFデ

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|s_n(x)-\sigma_n(x)|^q dx\right)\leqq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{q}{p}-1}\left(|a_n|^q+|b_n|^q\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{p}{q}-1}\left(|a_n|^p+|b_n|^p\right)\leqq\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|S_n(x)-\sigma_n(x)|^p\right)dx$$

定理I.(Hardy). $k\geqq 1$, $r>1$ トシ，(6.5) ＝ヨッテ $F(x)$ ヲ定義スルトキ

$$\int_0^{\infty}F^k\frac{dx}{x^r}\leqq C\int_0^{\infty}(xf)^k\frac{dx}{x^r}$$

定理7ノ証. 定理Aカラ

$$\int_0^{2\pi}|S_n-\sigma_n|^q dx=\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu A_\nu(x)\right|^q dx$$

$$\leqq\frac{C}{n^q}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p\left(|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\right)\right\}^{q/p}$$

定理Hカラ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|s_n-\sigma_n|^q dx \leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q+1}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^p(|a_n|^p+|b_n|^p)\right\}^{q/p}$$

$$\leqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q+1}}\left\{n^p(|a_n|^p+|b_n|^p)\cdot n\right\}^{q/p}$$

$$\leqq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{q}{p}-1}(|a_n|^q+|b_n|^q).$$

又定理Gカラ

$$\int_0^{2\pi}|s_n-\sigma_n|^p dx \geqq \frac{C}{n^p}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^q(|a_\nu|^q+|b_\nu|^q)\right\}^{p/q}.$$

定理Iカラ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|s_n-\sigma_n|^p dx$$

$$\geqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^q(|a_n|^q+|b_n|^q)\right\}^{p/q}$$

$$\geqq C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\left\{n^q(|a_n|^q+|b_n|^q)\cdot n\right\}^{p/q}$$

$$\geqq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{p}{q}-1}(|a_n|^p+|b_n|^p).$$

故ニ定理ガ完全ニ証明出来タ。