734. 大数ノ法則, I

北川　敏男（阪大）

§1. 相互ニ独立ナ確率変数ノ級数ニ関シテハ，近年著シイ研究ノ進展ガ見ラレタ。コレカラノ問題トシテハ，更ニ進ンデ，必ズシモ相互ニ独立ト限ラナイ。即チ一般ノ確率変数ノ級数ノ研究ガ残サレテ居ル。以下、簡単ノタメ，前者ヲ独立級数，後者ヲ聯鎖級数ト標語的ニ略称スル。

聯鎖級数ヲ研究スル手近ナ方法トシテ、独立級数ノ諸定理ノ拡張ヲ最初ノ目標ニ置クト云フ行キ方ガアル譯デアロウ。即チコレラ諸定理ノ証明ヲ再検討シ果シテ、確率変数ノ相互ニ独立トイフコトガ本質的ニ必要ナノカ否カヲ調ベル。或ルモノハ実ハ、モット緩イ條件デ置換シ得ルコトモアロウ。然ルトキニハ，聯鎖級数（或ル制限ノ下デノ）ニ関スル結果ガ得ラレル事ニナル。

聯鎖ナ確率現象ノ研究トシテハ，勿論、上述ノ如キ行キ方ノミニ満足出来ナイ。統計力学ノ示唆スルヤウナ色々ナ個々ノ聯鎖ナ確率現象ノ研究カラ出発シテ進ンデ行クコトガ有效適切デアル。タゞ前者ノ場合ニハ，既ニ完成シタ部門ノ結果ノ吟味カラ出発スルダケニ、比較的ニ見透シガツケヤスイ、コノヤウナ行キ方ヲシテ、成功ヲ納メタモノトシテ、聯鎖級数ニ関スル反覆對数ノ法則（der Satz vom iterierten Logarithm）ヲ挙ゲルコトガ出来ル。コレハ大数ノ（強）法則ノ名ニ総括サレテ呼バレルコトモア

ル。私ハ茲ニ、

Paul Lévy: La loi forte des grands nombres pour les variables aléatoires enchaînées. Journ. de Math pures et appl. Sér. IX, 15 (1936)

ヲ最後ノ目標ニシテ、コノ方面ノ紹介ヲ試ミヤウト思フ。

本誌682号、彷徨函数（*random functions*）ノ§4デ私ハ彷徨函数ニ関スルノ*Hölder*ノ條件ノ証明ヲ與ヘタ、コレハソコデ必要ナダケニ止メテ（即チ*Lebesgue*測度ノ導入ヲ可能ナラシメル目的）、既ニ知ラレテ居ル最良ノ評価マデ導イテハ居ラナイ。（コレニ関シテハ実ハ反復對數ノ法則ガ成立スルコトハ以下ニ述ベルコトニ依ッテ明カデアル）コレヲソノマヽニ放置シテオクノモ気ガトガメル。彷徨函数ニ関スル研究ノ発展トシテ無限ニ分解可能ナ確率法則、更ニ進ンデハ，確率法則ノ分解問題ガアル。コレニ関シテハ別稿デ紹介ヲ続ケツヽアル。

他方、定量的ナ問題ノ発展モアル譯デ、ソレモ亦極メテ重要ナコトト云ハナケレバナラナイ。本稿ニ於テハ，後者ヲ述ベル譯デアル。

§2. 豫備的ナ考察　茲デハ，独立ナ確率変数ノ和ヲ論ズルニ當ッテ重要ナ手段トナル方法ガ、聯鎖ノ場合ニ拡張出来ナイカトイフコトヲ問題ニスル。

〔I〕 標準偏差：　$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \cdots\cdots,\ X_n$ ガ相互ニ独立デ且ツ $E\{X_\nu\}=0,\ E\{X_\nu^2\}<\infty\ (\nu=1,2,\cdots$

----, n) デアレバ

$$(1)\quad E\left\{S_n^2\right\} \equiv E\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu\right)^2\right\} = \sum_{\nu=1}^{n} E\left\{X_\nu^2\right\}$$

トナル。然ルニ(1)ナル関係式ノ成立ノタメニハ相互ニ独立デナクトモヨイ。例ヘバ

a. $\{X_\nu\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$ ノドノ二ツニモ独立デアリ、且ツ $E\{X_\nu\}=0$ ナル場合. 〔蓋シ $E\{X_i X_j\} = E\{X_i\}E\{X_j\}=0$〕

b. 任意ノ i, j $(i<j)$ ニ就イテ次ノコトガ成立スル場合: X_i ガ或ル知ラレタ数 x ヲトル時, X_j ノ従フ條件付確率法則ニ対スル平均値 $E'\{X_j\}$ ハ 0 デアル。而モコノコトガ何デアッテモ成立ツ場合.

$$〔蓋シ\ E\{X_i X_j\} = E\{X_i E'\{X_j\}\} = 0〕$$

c. $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{\nu-1}$ ガ知ラレタモノトシテ計算シタ X_ν ノ平均値 $E_{\nu-1}\{X_\nu\}$ ガ 0 デアル場合.

$$\left[蓋シ \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2 = 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} X_i X_j + \sum_{j=1}^{n} X_j^2\right]$$

d. $1 \leqq \nu \leqq n$ ノ各 ν ニツイテ $S_{\nu-1} = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_{\nu-1}$ ヲ知ルトキ X_ν ノ従フ條件付確率法則ハ平均値 0 ヲモツ場合. 〔c ノ証明ニ依リ明ラカ〕

ソノ他、イロイロナ充分條件ヲ與ヘルコトガ出来ルデアロウ。サテ(1)ナル関係ガ成立スルトキ *Bienaymé-Tchebycheff* ノ定理ガ聯鎖級数ニツイテモ成立ツ: 任意ノ $c>0$ ニ対シテ

(2) $\Pr.\left\{|S_n| > c\, b_n\right\} < \dfrac{1}{c^2}$ $\left(但シ\ b_n = E\left\{S_n^2\right\} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} E\left\{X_\nu^2\right\}\right)$

コノ事カラ容易ニ: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/n = 0$ ナラバ, S_n/n ハ $n \to \infty$ ノトキ 0 ニ平均收斂ヲナス, 従ッテ 0 ニ確率收斂(convergence in probability)ヲナス.〔蓋シ(2)カラ $\Pr.\{|S_n/n| > (c\, b_n/n)\}$ ハ $1/c^2$ ヨリ小デアル。故ニ $1/c$, $c b_n/n$ ハ如何程デモ小サクトレルカラデアル〕(例ヘバ $|X_\nu| \leqq M$ 即チ一様ニ有界ノ場合, 假定ガ成立ツ)

カクノ如ク, 所謂標準偏差ノ増加ノ原理(1)ノ成立ノ條件ヲ吟味シテミルト、必ズシモ相互ニ独立トイフコトヲ必要トシナイ。

然ラバ, 散縮度増加ノ原理ヤ Kolmogoroff ノ不等式ハ如何ナル形デ、聯鎖ナ確率変数ノ和ヘ拡張出来ルデアロウカ。コレヲ次回ニ述ベル事ニスル。

〔註〕 二ツヅヽニ独立デ,(全体トシテ)相互ニ独立デナイ三ツ確率変数ノ例. X_1, X_2, X_3 ハ共ニ $1, -1$ ヲバ夫々 $1/2$ ナル確率変数デトルトシ、$X_1 X_2 X_3 = 1$ ナリトスル。

X_1 ト X_2 トガ独立ナリトスル。然ルトキニハ, X_3 ト X_1 トハ独立デアル。

X_3 ト X_2 トハ独立デアル。然ルニ $X_1 X_2 X_3 = 1$ ダカラ X_1, X_2, X_3 ハ相互ニ独立デハナイ。