# 733. Continuous geometry ニツイテ

小平 邦彦, 古屋 茂 (東大)

Neumann ハ「continuous geometry」ニ於テ order ガ $\geqq 4$ ナル complemented modular lattice ハ regular ring ノ principal right ideal ノ作ル lattice ニ「isomorph」トナルコトヲ証明シタ (continuous geometry: Part II, 頁52—141)。

之レハ「次元ガ $\geqq 3$ ナル射影空間ニハ座標ヲ導入スルコトガ出来ル」トイフコトヲ非常ニ一般ナ形ニ拡張シタモノデ、ソノ証明法ハ大体ニ於テ射影幾何ノ場合ト同様デアルガカナリ長イ計算ヲ行ツテキル。吾々ハ、シカシコノ計算ヲ比較的簡単ニスルコトガ出来タノデ、ソレヲ半バ Neumann ノ証明法ヲ紹介スル意味デコヽニ書カウト思フ。

最初, complemented modular lattice, regular ring 等ノ意味ヲ説明シ, I ニ於テ regular ring ニ関スル定理及ビソノ証明, II ニ於テ Neumann ノ証明ヲ述ベル。

先ヅ lattice ノ定義カラ始メヨウ: コヽニ集合 L ガアツテ、ソノ元 $a, b$, etc. ノ間ニ「和」$a \cup b$ 及ビ「積」$a \cap b$ ガ定義サレテヰテ, コレガ次ノ公理 I ヲ満足スルトキ L ヲ lattice トイフ。

公理 I.

1) $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

2) $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$

3) $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cup \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c})$,

$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c})$

4) $(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$

Lガlatticeデアレバ $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ ト $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ トハ同値デ、コノコトヲ $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ デアラハストキ，$\leqq$ ガ次ノ公理I′ヲ満足スルコトハスグ分ル。

公理I′

1) $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}$

2) $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$ ナラバ $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$

3) $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{c}$ ナラバ $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$

4) $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{x}$, $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{x}$ ナル「最小」ノ $\mathfrak{x}$ ガ存在スル。

5) $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{b}$ ナル「最大」ノ $\mathfrak{x}$ ガ存在スル。

4) ニ於ケル $\mathfrak{x}$ ヲ $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$. 5) ニ於ケル $\mathfrak{x}$ ヲ $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ トオケバ公理IハマタI′カラ容易ニ出スコトが出来ル。従ツテ公理Iト公理I′トハ同値デアル。

今一ツノ ring $\mathfrak{R}$ ヲトツテ，ソノ right ideal $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ノ「和」ヲ $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$（通常ノ意味ノ ideal ノ和），「積」ヲ $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$（$\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トノ Durchschnitt）トスル。コノトキ，$\mathfrak{R}$ ノ right ideal ノ集合Lガソノ元ノ「和」及ビ「積」ヲ含ムナラバ L ハコノ様ニ定義サレタ和及ビ積ニ関シテ lattice ヲ作ルコトハ明ラカデアル。簡単ノタメ，ring $\mathfrak{R}$ ノ right ideal ノ作ル

lattice L トイヘバ，常ニ上ノ様ニ定義サレタ和及ビ積ニ関スル lattice ヲ意味スルモノトスル。

公理 II. (modularity)

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c} \text{ ナラバ } (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

コノ公理 II ヲ満足スル lattice ヲ modular lattice トイフ。上ニ書イタ ring ノ right ideal カラ作ラレル lattice ハスグ分ルヤウニ modular lattice デアル。

公理 III. (Complementation)

1) 凡ベテノ $\mathfrak{a}$ ニ對シテ $\mathfrak{a} \leqq 1$ ナル 1 ガ存在スル。

2) 凡ベテノ $\mathfrak{a}$ ニ對シテ $0 \leqq \mathfrak{a}$ ナル 0 ガ存在スル。

3) 各 $\mathfrak{a}$ ニ對シテ $\mathfrak{a}$ ノ逆ト呼バレル元 $\mathfrak{y}$ ガ少クトモ一ツ存在シテ $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{y} = 1 \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y} = 0$

公理 III ヲ満足スル lattice ヲ complemented lattice トイフ。コヽデ再ビ ring $R$ ノ right ideal ノ作ル lattice L ニツイテ考ヘレバ L ハ一般ニハ公理 III ヲ満足シナイコトハ勿論デアル。シカシタトヘバ $R$ ヲ「semi-simple」ナ ring トスレバ $R$ ノ right ideal 全体ノ作ル lattice L ハ complemented modular lattice ニナル。Neumann ハ「semi-simple」ナル概念ヲ拡張シテ regular ring ヲ次ノ如ク定義シタ。

1. $R$ ハ単位元ヲ有スル。

2. $R$ ノ principal right ideal ハ idem-

potent ナ元デ「erzeugen」サレル 1, 2 ヲ満足スル ring ヲ regular ring ト云フ。

semi simple ナラバ regular トナルコトハ明ラカデアルガ、逆ニ principal right ideal ニ関スル minimal condition ヲ有スル regular ring ガ semi simple トナルコトモ亦容易ニ証明サレル。實際 regular ring $R$ ノ principal right ideal ノ全体ガ complemented modular lattice ニナルコトハ §I Satz 1. コノ lattice ヲ $R_{\mathfrak{R}}$ デアラハス。

次ニ $n$ 次元射影空間 $\mathfrak{P}_n$ ヲ考ヘ，$\mathfrak{P}_n$ ニ含マレル凡ベテノ点，直線，平面，etc. ノ集合ヲ L トシ，L ノ元 $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{b}$ ニ含マレル（又ハ $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{b}$ ノ上ニアル）トキ，$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ トカケバ L ガ complemented modular lattice ニナルコトモ困難ナク証明サレル。ヨク知ラレテヰルヤウニ $n \geqq 3$ ナルトキ $\mathfrak{P}_n$ ニ「Schiefkörper」K ノ「Element」ヲ元トスル座標ヲ導入スルコトガ出来ル。コレハ $\mathfrak{P}_n$ カラ作ラレタ lattice L ガ $L = R_{K_{n+1}}$ トカケルコトト同値デアル。（$K_{n+1}$ ハ K ノ上ノ $(n+1)$ 次ノ Matrix ring）. コレト平行ニ適當ナ條件（上ノ $n \geqq 3$ ニ相當スル條件）ノアル complemented modular lattice L ハ或 regular ring $R$ ヲトッテ $L = R_{\mathfrak{R}}$ トカケルコトヲ証明スルノガ吾々ノ目的デアル。

# I. regular ring

ハジメニ，使用スル記号ニツイテ：

1) $(x;\ E(x))$ ハ $E$ ナル性質ヲ有スル $x$ ノ集合ヲ表ハス。

2) ring $\mathfrak{R}$ ノ元 $a$ デ生成サレル right (left) ideal $a\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R}a$) ヲ $(a)_r$ ($(a)_l$) デアラハス，

即チ

$$(a)_r = (ax\ ;\ x \in \mathfrak{R});\quad (a)_l = (xa;\ x \in \mathfrak{R})$$

3) $\mathfrak{m}$ ヲ ring $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ部分集合トスルトキ

$$\mathfrak{m}^r = (x;\ \mathfrak{m}x = 0);\quad \mathfrak{m}^l = (x;\ x\mathfrak{m} = 0)$$

4) ring $\mathfrak{R}$ ノ上ノ $n$-dimension ノ vector-space ヲ $V_{\mathfrak{R}}^n$ トカク。

$$V_{\mathfrak{R}}^n = E_1\mathfrak{R} + \cdots + E_n\mathfrak{R}$$

コヽニ $E_1 \cdots E_n$ ハ一次独立ナ Basis ヲ現ハス。

定義 I. ring $\mathfrak{R}$ ガ単位元 $1$ ヲ有シ，各 $a \in \mathfrak{R}$ ニ對シテ $axa = a$ トル $x$ ガ存在スルトキ $\mathfrak{R}$ ヲ regular ring トイフ。

Lemma I. 次ノ i), ii) ハ同値デアル。

i) $\mathfrak{R}$ ハ regular ring.

ii) $\mathfrak{R}$ ハ単位元ヲモツ ring デソノ principal right ideal ハ idempotent ナル元ニヨッテ「erzengen」サレル。

証明： i) $\longrightarrow$ ii) $axa = a$ トスル $ax = e$ トオケ

バ $a=ea,\ e^2=e$

$$\therefore\ (a)_r=(e)_r$$

ii) $\rightarrow$ i) $(a)_r=(e)_r,\ e^2=e$ ヨリ $e=ay$.

$a=ea$.

$$\therefore\ a=aya\ \text{トナル。}$$

以下 $\mathfrak{R}$ ハ regular ring トスル。

Lemma 2. $a,b\in\mathfrak{R}$ トスレバ $(a)_r\cup(b)_r=(c)_r$ ナル $c\in\mathfrak{R}$ ガ存在スル。

証明: $(a)_r=(e)_r,\ e^2=e$ トスル.

$(1-e)b\cdot x\cdot(1-e)b=(1-e)b$ トナル $x$ ヲトッテ $\bar{e}=(1-e)bx(1-e)$ トオケバ $\bar{e}^2=\bar{e},\ e\bar{e}=\bar{e}e=0$.

次ニ $\bar{e}\in(e)_r\cup(b)_r$ ハ明ラカデアルガ，更ニ $b=eb+(1-e)b=eb+\bar{e}b\in(e)_r\cup(\bar{e})_r$ トナル。故ニ $(a)_r\cup(b)_r=(e)_r\cup(b)_r=(e)_r\cup(\bar{e})_r=(e+\bar{e})_r$

Lemma 3. i) $(e)_r^l=(1-e)_l$,

ii) $(e)_r^{lr}=(e)_r$ iii) $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ ヲ或ル ring ノ right ideal トスレバ $\mathfrak{a}^l\cdot\mathfrak{b}^l=(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})^l$

証明:

i) $(e)_r^l=(x;\ xe=0)=(1-e)_l$

ii) $(e)_r^{lr}=(1-e)_l^r=(e)_r$

iii) $\mathfrak{a}^l\cdot\mathfrak{b}^l=(x;\ x\mathfrak{a}=0,\ x\mathfrak{b}=0)$
$=(x;\ x(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})=0)=(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})^l$

Lemma 4. $a, b \in \mathfrak{R}$ トスレバ $(a)_r \cdot (b)_r = (c)_r$ ナル $c \in \mathfrak{R}$ ガ存在スル。

証明： $(a)_r = (e)_r$, $e^2 = e$ ; $(b)_r = (f)_r$, $f^2 = f$ トスレバ

$$(a)_r \cdot (b)_r = (e)_r^{lr} \cdot (f)_r^{lr} = \left((e)_r^l \cup (f)_r^l\right)^r$$

$$= \left((1-e)_l \cup (1-f)_l\right)^r = (c)_r$$

定理 1. $R_{\mathfrak{R}}(L_{\mathfrak{R}})$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ principal right (left) ideal ノナス集合トスレバ，$R_{\mathfrak{R}}(L_{\mathfrak{R}})$ ハ complemented modular lattice ヲナス。

証明： Lemma 2, 4 ニヨリ lattice ヲナス．modularity，complementation ハ明ラカデアル。

定理 2. 一次方程式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ $(i = 1, \cdots m)$ ノ解ハ $e_i c_{ij} = 0$, $c_{ij} e_j = c_{ij}$, $e_j^2 = e_j$ ナル $e_i, c_{ij}$ ニヨッテ

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} u_j + e_i u_i, \quad u_j \in \mathfrak{R}$$

ナル形ニアラハサレル。

証明： $n$ ニ関スル帰納法ニヨル。

$$\sum_i (a_{in})_l = (f)_l, \quad f^2 = f, \quad f = \sum_i b_i a_{in},$$

$f b_i = b_i$, $a_{in} f = a_{in}$ トナル $f$ 及ビ $b_i$ ガ存在スルカラ

之ニヨツテ與ヘラレタ式ヲ変形スレバ

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{ij}-a_{in}\sum_{i} b_i a_{ij}\right)x_j=0 \qquad 1\leqq i\leqq m$$

$$(2)\quad \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} b_i a_{ij} x_j + f x_n = 0$$

(1) ノ解ハ帰納法ノ假定ニヨリ $x_i=\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}u_j+e_iu_i$ トアラハサレル、コレヲ (2) ニ代入スレバ

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i}\sum_{k=j-1}^{n-1} b_i a_{ik} c_{kj}+\sum_{i} b_i a_{ij} e_j\right)u_j+f x_n=0$$

コヽデ $e_n=1-f$, $c_{nj}=-\left(\sum_{i}\sum_{k=j+1}^{n-1} b_i a_{ik} c_{kj}+\sum_{i} b_i a_{ij} e_j\right)$

トオケバ $x_n=\sum_{j=1}^{n-1} c_{nj}u_j+e_nu_n$ ト解カレテ $e_n^2=e_n$.

$e_n c_{nj}=0$, $c_{nj}e_j=c_{nj}$ (q. e. d)

系 $x_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$, $y_j\in\mathfrak{R}$ ナル $(x_i)$

ノ全体ハ $e_ic_{ij}=0$, $c_{ij}e_j=c_{ij}$, $e_j^2=e_j$ ナル $e_i, c_{ij}$

ニヨツテ $x_i=\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}u_j+e_iu_i$ ノ形ニアラハサレル。

*Lemma* 5. $A=(a_{ik})\in\mathfrak{R}_n$, ($\mathfrak{R}_n$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ上ノ $n$ 次ノ Matrix ring)

$x_i=\sum a_{ij}y_j=\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij}u_j+e_iu_i$ ナル $c_{ij}$, $e_i$ ヲトツテ $e_{ii}=e_i$, $e_{ij}=c_{ij}$ $(i>j)$, $e_{ij}=0$ $(i<j)$ トシテ

$E = (e_{ij})$ トオケバ

$$(A)_r = (E)_r, \quad E^2 = E$$

証明: $\mathfrak{R}$ ノ上ノ縦ニカイタ $n$ 次ノ vector 全体ノ集合ヲ $V$ トスレバ、上ノ系ニヨッテ $(A\mathfrak{x};\ \mathfrak{x} \in V) = (E\mathfrak{y};\ \mathfrak{y} \in V)$、更ニ $B = (b_{ik})$ トシテ

$$b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$ トオケバ $B = (b_1, \cdots\cdots, b_n)$ トカケル。故ニ

$$AB = A(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n) = (Ab_1, Ab_2, \cdots\cdots, Ab_n)$$
$$= (Ec_1, Ec_2, \cdots\cdots, Ec_n) = E(c_1 \cdots\cdots c_n) = EC$$
$$\therefore\ (A)_r = (E)_r, \quad E^2 = E.$$

定理3. $\mathfrak{R}_n$ ハ regular ring トナル。

証明: Lemma 5 ヨリ明白デアル。

定理4. $\mathfrak{r}_n$ ガ regular ナラバ $\mathfrak{r}$ モ亦 regular トナル。

証明: $a \in \mathfrak{r}$ ガ第一行, 第一列ニアッテ他ハ $0$ ノ Matrix ヲ $A$ トカク。$AXA = A$ ナル $X$ ガ存在スルカラ $X$ ノ第一行, 第一列ノ元ヲ $x$ トスレバ $axa = a$.

次ニ $V^n_{\mathfrak{r}}$ ノ「$\mathfrak{r}$-Rechtsmodul」$\mathfrak{M}$ ニ對シテ $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$ ヲ $\mathfrak{v}(\mathfrak{M}) = \left((x_{ij});\ E_1 x_{ij} + E_2 x_{2j} + \cdots\cdots + E_n x_{nj} \in \mathfrak{M}\right)$ トオケバ $\mathfrak{v}(\mathfrak{M})$ ハ $\mathfrak{R}_n$ ノ right ideal ニナル。又逆ニ $\mathfrak{R}_n$ ノ right ideal $\mathfrak{a}$ ガ與ヘラレタ場合ニ $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ ヲ

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{a}) = \left(E_1 x_1 + E_2 x_2 + \cdots\cdots + E_n x_n,\right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} ; \ A \in \mathfrak{a} \Bigg)$$ デキメレバ $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ ハ $V_{\mathfrak{K}}^{n}$ ノ「$\mathfrak{K}$-Rechtsmodul」トナッテ明ラカニ $\mathfrak{m}(\mathfrak{r}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}(\mathfrak{m}(\mathfrak{a}))$ が成立スル。

定義2. 二ツノ lattice $L, \overline{L}$ ノ部分集合 $M, \overline{M}$ ノ元 $\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}$ ノ間ニ一對一ノ對應 $J$: $\mathfrak{X} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{X}}$ ガアッテ, $\mathfrak{X} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{X}}$. $\mathfrak{Y} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{Y}}$ ナラバ

$$\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{X}} \cup \overline{\mathfrak{Y}}, \quad \mathfrak{X}\mathfrak{Y} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{X}} \cdot \overline{\mathfrak{Y}}$$

ナルトキ $M$ ト $\overline{M}$ トハ lattice isomorphic デアルトイヒ, $J$ ヲ lattice isomorphism トイフ。コノトキ $M \cong \overline{M}$ トカク。

定理5. i) $\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{r}(\mathfrak{M})$ ニヨッテ $V_{\mathfrak{K}}^{n}$ ノ「$\mathfrak{K}$-Rechtsmodul」ノ作ル lattice ト $\mathfrak{K}$ ノ right ideal ノ作ル lattice トハ lattice isomorphic ニ對應スル。

ii) コノ對應ニ於テ $R_{\mathfrak{K}}$ ノ元ニハ有限ケノ「erzeugende」ヲ有スル Modul が對應スル。

證明: i) ハ明白デアル。

ii) $(A)_r \in R_{\mathfrak{K}}$, $A = (\mathfrak{a}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n)$ トスレバ $\mathfrak{m}((A)_r)$ ハ vector $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_n$ ニヨッテ「erzeugen」サレル。逆ニ $\mathfrak{M}$ ノ「erzeugende」ヲ $\mathfrak{a}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{a}_p$ トスルトキ $A_i = (\mathfrak{a}_i, 0, \cdots\cdots, 0)$ ナル Matrix $A_i$ ヲ作レバ定理1, 定理3ニヨッテ $(A_1)_r \cup (A_2)_r \cup \cdots\cdots \cup (A_p)_r = (A)_r$ ナル $A$ が存在シ

テ $v(m) = (A)_r$ トナル。

## II. Complemented modular lattice

### §1[1] homogeneous basis, normalized frame

II デハ L ハ常ニ complemented modular lattice トシ，L ノ元ヲ一般ニ $a, b, c, x, y, z$ ……… デアラハス。先ヅ二三ノ記号ヲ説明スル。

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n$;

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

2) $a^n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ; $\quad a_j^n = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i$

3) $L(a) = (x;\ 0 \leqq x \leqq a)$ トオケバ $L(a)$ ガ modular lattice ヲ作ルコト八明ラカデアルガ $L(a)$ ハ更ニ complemented デアル。

「1」トシテハ $a$ ヲトレバヨイシ、逆ノ存在スルコトハ: $b \in L(a)$ ノトキ $b \cup y = 1$, $b \cdot y = 0$ ヲ満足スル $y$ ヲトリ $z = a \cdot y$ トオケバ $z \in L(a)$, $b \cup z = a$, $b \cdot z = 0$

コノ $z$ ノ集合ヲ $a - b$ トカクコトニスル。即チ

$$a - b = (z;\ b \cup z = a,\ b \cdot z = 0)$$

Lemma 1. i) $(a \cup b)c \cup a = (a \cup c)b \cup a$

ii) $(a \cup b)c = 0$ ナラバ $(a \cup c) \cdot b = ab$

iii) $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}^n=0$ ナラバ $\prod_{i=1}^{n}(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_i)=\mathfrak{a}\cup\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{b}_i$

證明. i) $(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})\mathfrak{c}\cup\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{c})\mathfrak{b}\cup\mathfrak{a}$

ii) i)ノ両辺ニ $\mathfrak{b}$ ヲカケレバ $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{c})\mathfrak{b}\cup\mathfrak{a}\mathfrak{b}$

$$=(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{c})\mathfrak{b}$$

iii) $n=2$ ナラバ $(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_1)(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_1(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_2)$

$$=\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$$

(コノ最後ノ等式ハ ii) ニヨル). $n-1$ ノトキ成立スルト假定スレバ

$$\prod_{i=1}^{n}(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_i)=\prod_{i=1}^{n-1}(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_i)(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_n)$$

$$=\left(\mathfrak{a}\cup\prod_{i=1}^{n-1}\mathfrak{b}_i\right)(\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_n)=\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}_n\left(\mathfrak{a}\cup\prod_{i=1}^{n-1}\mathfrak{b}_i\right)=\mathfrak{a}\cup\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{b}_i$$

定義 1. $\mathfrak{a}_i\cdot\mathfrak{a}_i^n=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ナルトキ $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots\cdots,\mathfrak{a}_n$ ハ independence デアルトイヒ, $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots\cdots,\mathfrak{a}_n)\perp$ トカク。

Lemma 2. $\mathfrak{a}^{i-1}\cdot\mathfrak{a}_i=0$ $(i=2,3,\cdots\cdots\cdots,n)$ ナラバ $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots\cdots,\mathfrak{a}_n)\perp$

證明: $n$ ニ関スル帰納法. $n-1$ ニツイテ Lemma ヲ假定スレバ

$$\mathfrak{a}_i^n\cdot\mathfrak{a}_i=(\mathfrak{a}_i^{n-1}\cup\mathfrak{a}_n)\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}_i^{n-1}\cdot\mathfrak{a}_i=0$$

定義 2. $\mathfrak{a}\cup\mathfrak{c}=\mathfrak{b}\cup\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}=0$ ノトキ $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トハ axis $\mathfrak{c}$ ニ関シテ perspective デアルトイヒ、之レヲ $\mathfrak{a}\overset{\mathfrak{c}}{\sim}\mathfrak{b}$ トアラハス。

又、或ル $\mathfrak{c}$ ニツイテ $\mathfrak{a} \widetilde{\mathfrak{c}} \mathfrak{b}$ トナルトキ、之レヲ簡単ニ $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ トカク。

定理1.[2] $\mathfrak{a} \widetilde{\mathfrak{c}} \mathfrak{b}$ ナルトキ、$\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$ ナル $\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{y} \leqq \mathfrak{b}$ ナル $\mathfrak{y}$ トガ $\mathfrak{x} \widetilde{\mathfrak{c}} \mathfrak{y}$ ナル関係ニヨリ lattice isomorphic ニ対應スル。

証明. i) $\mathfrak{x}$ ニ対シテ $\mathfrak{y} = (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{b}$ トオケバ

$$\mathfrak{y} \cup \mathfrak{c} = (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c} = (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{c})(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c})$$
$$= (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{c})(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c}) = \mathfrak{x} \cup \mathfrak{c}$$

故ニ $\mathfrak{x} \widetilde{\mathfrak{c}} \mathfrak{y}$.

ii) $\mathfrak{x} \widetilde{\mathfrak{c}} \mathfrak{y}$ トスレバ $\mathfrak{x} \cup \mathfrak{c} = \mathfrak{y} \cup \mathfrak{c}$.
故ニ $\mathfrak{y} = (\mathfrak{y} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{b} = (\mathfrak{x} \cup \mathfrak{c})\mathfrak{b}$. 故ニ $\mathfrak{x} \widetilde{\mathfrak{c}} \mathfrak{y}$ ニヨッテ $\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{y}$ トガ一対一ニ対應スル。コノ対應ガ lattice isomorphic ナルコトハ明ラカデアル。

定義3.[3] $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) \perp$, $\mathfrak{a}_i \sim \mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{a}^n = 1$ ナル $(\mathfrak{a}_i)$ ヲ $L$ ノ homogeneous Basis ト名付ケ、$n$ ヲ $L$ ノ order トイフ。

以下 $L$ ノ homogeneous Basis ヲ常ニ $(\mathfrak{a}_i;\ 1 \leqq i \leqq n)$ デアラハス。

定義4[4] $L_{ij} = (\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_j) - \mathfrak{a}_j$; $L_{ij}$ ノ元ヲ $\mathfrak{b}_{ij}$, etc. トカク。コノ定義ニヨレバ $L_{ii} = 0$ デアル。

定義5.[5] $\mathfrak{b}_{ij} \otimes \mathfrak{b}_{jk} = (\mathfrak{b}_{ij} \cup \mathfrak{b}_{jk})(\mathfrak{a}_i \cup \mathfrak{a}_k)$

Lemma 3. i) $\mathfrak{b}_{ij} \otimes \mathfrak{b}_{jk} \in L_{ik}$, $(i \neq k)$

ii) $(\mathfrak{b}_{ij} \otimes \mathfrak{b}_{jk}) \otimes \mathfrak{b}_{kl} = \mathfrak{b}_{ij} \otimes (\mathfrak{b}_{jk} \otimes \mathfrak{b}_{kl})$,

$(j \neq l \neq i \neq k)$

証明. i) $(b_{ij} \otimes b_{jk}) \cup a_k = (b_{ij} \cup b_{jk} \cup a_k)(a_i \cup a_k)$
$= a_i \cup a_k$

$$(b_{ij} \otimes b_{jk}) a_k = (b_{ij} \cup b_{jk})(a_j \cup a_k) a_k$$
$$= (b_{ij}(a_j \cup a_k) \cup b_{jk}) a_k = 0$$

ii) $(b_{ij} \otimes b_{jk}) \otimes b_{kl}$

$$= ((b_{ij} \cup b_{jk})(a_i \cup a_k) \cup b_{kl})(a_i \cup a_l)$$
$$= ((b_{ij} \cup b_{jk})(a_i \cup a_k \cup a_l) \cup b_{kl})(a_i \cup a_l)$$
$$= (b_{ij} \cup b_{jk} \cup b_{kl})(a_i \cup a_l)$$

同様ニ $b_{ij} \otimes (b_{jk} \otimes b_{kl}) = (b_{ij} \cup b_{jk} \cup b_{kl})(a_i \cup a_l)$

定理2. $(a_i;\ 1 \leqq i \leqq n)$ ヲ *homogeneous basis* トスルトキ $c_{ik} \in L_{ik}$, $c_{ik} = c_{ki}$, $c_{ij} \otimes c_{jk} = c_{ik}$ ナル $(c_{ik})$ が存在スル。

証明: $a_1 \sim a_i$ ノ *axis* ヲ $c_{1i}$ トカキ $c_{i1} = c_{1i}$ トオク。

$c_{ij} = c_{i1} \otimes c_{1j}$ ト定メレバ $c_{ji} = c_{ij}$. 次ニコノ $(c_{ij})$ ニ関シテ *Lemma* 3 ハ $i, j, k, l$ ノ如何ニカヽハラズ成立スルカラ $c_{ij} \otimes c_{jk} = c_{i1} \otimes c_{1j} \otimes c_{j1} \otimes c_{1k} = c_{i1} \otimes c_{11} \otimes c_{1k} = c_{i1} \otimes c_{1k} = c_{ik}$

定義6.[6] $L$ ノ *homogeneous basis* $(a_i;\ 1 \leqq i \leqq n)$ ニツイテ定理2ニ於ケル $(c_{ik})$ ヲ作ツタトキ $(a_i, c_{ik})$ ノ作ル *System* ヲ $L$ ノ *normalized frame* トイフ。

*Lemma* 4. $(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m) \perp$, $c \in a^m - a^{m-1}$ ナルトキ

$$\mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})} = (\mathfrak{c} \cup \mathfrak{a}_j^{m-1})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m)$$ トオケバ $\mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})} \in L_{mj}$

且ツ $\mathfrak{c} = \prod_{j=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_j^{m-1} \cup \mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})})$.

証明 i) $\mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})} \cup \mathfrak{a}_j = (\mathfrak{c} \cup \mathfrak{a}^{m-1})(\mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m) = \mathfrak{a}_j \cup \mathfrak{a}_m$

$\mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})} \cdot \mathfrak{a}_j = (\mathfrak{c} \cup \mathfrak{a}_j^{m-1})\mathfrak{a}_j = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}_j = 0$

$\therefore\ \mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})} \in L_{mj}$

ii) $\mathfrak{a}_j^{m-1} \cup \mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})} = \mathfrak{c} \cup \mathfrak{a}_j^{m-1}$ $(\mathfrak{a}_1, \dots\dots, \mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{c}) \perp$ ナル故

$$\prod_{j=1}^{m-1} (\mathfrak{a}_j^{m-1} \cup \mathfrak{b}_{mj}^{(\mathfrak{c})}) = \prod_{j=1}^{m-1} (\mathfrak{c} \cup \mathfrak{a}_j^{m-1}) = \mathfrak{c} \cup \prod_{j=1}^{m-1} \mathfrak{a}_j^{m-1} = \mathfrak{c}$$

定理3. $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots\dots, \mathfrak{a}_m) \perp$, $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}^m$ トスレバ

適當ニ $\mathfrak{b}_l \leqq \mathfrak{a}_l$, $\mathfrak{b}_{lj} \in L_{lj}$ ヲトッテ

$$\mathfrak{b} = \sum_{l=1}^{m} \left( (\mathfrak{a}^{l-1} \cup \mathfrak{b}_l) \prod_{j=1}^{l-1} (\mathfrak{a}_j^{l-1} \cup \mathfrak{b}_{lj}) \right)$$

トカクコトガ出來ル。

証明: $\mathfrak{b}^{(l)} \in \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^l - \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^{l-1}$ ヲ任意ニトレバ

$\mathfrak{b}^{(l)} \cdot \mathfrak{a}^{l-1} = 0$, 且ツ $\mathfrak{b}^{(l)} \cup \mathfrak{a}^{l-1} \leqq \mathfrak{a}^l$ ナル故

$\mathfrak{c}^{(l)} \in \mathfrak{a}^l - \mathfrak{a}^{l-1}$ ヲ $\mathfrak{b}^{(l)} \leqq \mathfrak{c}^{(l)}$ ナル如クキメルコトガ出來ル。 即チ $\mathfrak{c}^{(l)} \underset{\mathfrak{a}^{l-1}}{\frown} \mathfrak{a}_l$ デアルカラ $\mathfrak{b}_l \leqq \mathfrak{a}_l$ ヲ $\mathfrak{b}^{(l)} \underset{\mathfrak{a}^{l-1}}{\frown} \mathfrak{b}_l$ ニヨッテ定メレバ $\mathfrak{b}^{(l)} = (\mathfrak{a}^{l-1} \cup \mathfrak{b}_l)\mathfrak{c}^{(l)}$.

コンデ $\mathfrak{c}^{(l)}$ ハ Lemma 4 ニヨッテ

$\mathfrak{c}^{(l)} = \prod_{j=1}^{l-1} (\mathfrak{a}_j^{l-1} \cup \mathfrak{b}_{lj})$ トカケルカラ

$$b=\sum_{l=1}^{m} b^{(l)}=\sum_{l=1}^{m}\left((\mathfrak{a}^{l-1}\cup b_l)\prod_{j=1}^{l-1}(\mathfrak{a}_j^{l-1}\cup b_{lj})\right)$$

トナル。

系. $b \leqq \mathfrak{a}^m$ ハ

$$b = b\,\mathfrak{a}^{m-1} \cup (\mathfrak{a}^{m-1} \cup b_m)\prod_{j=1}^{m-1}(\mathfrak{a}_j^{m-1} \cup b_{mj})$$ ト

現ハサレル。

## §2. perspective 及 projective isomorphism

コレカラハ L ノ order ヲ $n \geqq 4$ トシ, L ノ normalized frame ヲ固定シテ, コレヲ $(\mathfrak{a}_i,\ c_{ik};\ i,j = 1,2,\cdots\cdots,n)$ デ表ハスコトニスル。

定義7. $m<n$. $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_m;\ j_1, j_2, \cdots\cdots, j_m$ ヲ夫々互ニ異ナル $m$ ケノ $1\leqq, \leqq n$ ナル自然数ノ組トシ, 一ツノ添数 $\bar{\rho}$ ヲ除イテ $i_\rho = j_\rho$ トスル。コノトキ

$$\sum_{\rho=1}^{m}\mathfrak{a}_{i_\rho} \underset{c_{i_{\bar\rho} j_{\bar\rho}}}{\sim} \sum_{\rho=1}^{m}\mathfrak{a}_{j_\rho}$$

デアル。コノ perspective isomorphism ニヨッテ,

$$u \leqq \sum_{\rho=1}^{m}\mathfrak{a}_{i_\rho}\ ;\quad v \leqq \sum_{\rho=1}^{m}\mathfrak{a}_{j_\rho}$$ ガ

$$u \underset{c_{i_{\bar\rho} j_{\bar\rho}}}{\sim} v$$ ナルトキ,

$$v = u\, P\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots\cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & \cdots\cdots & j_m \end{pmatrix}$$ トアラハス。

コヽデ $i_\rho = j_\rho$ ナラバ勿論 $u = v$

Lemma 5.

i) $u \leqq \sum_{\rho=1}^{h} a_{i_\rho}$ ナルトキハ $u P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots\cdots & i_m \\ j_1 & \cdots\cdots & j_m \end{pmatrix}$

$$= u P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots\cdots & i_h \\ j_1 & \cdots\cdots & j_h \end{pmatrix}$$

ii) $P\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$

iii) $b_{ij} P\begin{pmatrix} i & j \\ i & k \end{pmatrix} = b_{ij} \otimes c_{jk}$, $b_{ij} P\begin{pmatrix} i & j \\ h & j \end{pmatrix} = c_{hi} \otimes b_{ij}$

証明: i), iii) ハ明白

ii) $u \leqq a_i$ トスレバ

$$u P\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} = \left((u \cup c_{ij}) a_j \cup c_{jk}\right) a_k$$

$$= \left((u \cup c_{ij})(a_j \cup a_k) \cup c_{jk}\right) a_k = (u \cup c_{ij} \cup c_{jk}) a_k$$

$$= \left(u \cup (c_{ij} \cup c_{jk})(a_i \cup a_k)\right) a_k = (u \cup c_{ik}) a_k = u P\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}$$

Lemma 6

各 $\rho$ ニツイテ $i_\rho \neq j_\rho$ 及ビ $i_\rho = i_{\rho+1}$ 又ハ $j_\rho = j_{\rho+1}$

トスレバ

$$b_{i_1 j_1} P\begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ i_2 & j_2 \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} i_2 & j_2 \\ i_3 & j_3 \end{pmatrix} \cdots\cdots P\begin{pmatrix} i_{\sigma-1} & j_{\sigma-1} \\ i_\sigma & j_\sigma \end{pmatrix}$$

$$= c_{i_\sigma i_1} \otimes b_{i_1 j_1} \otimes c_{j_1 j_\sigma}$$

証明ハ Lemma 3, Lemma 5, iii) ニヨツテ明ラカデアル。

定理4. $j_\rho^{(1)}, j_\rho^{(2)}, \cdots\cdots, j_\rho^{(m)}$ ハ互ニ異ナル自然数

デ各 $\rho$ ニツイテ $\mu \neq \mu_\rho$ ナラバ $j_\rho^{(\mu)} = j_{\rho+1}^{(\mu)}$ トスル。

コノトキ $\mathfrak{u} \leqq \sum_{\mu=1}^{m} \mathfrak{a}_{j_1}^{(\mu)}$ ニ対シテ

$$\mathfrak{u} P\begin{pmatrix} j_1^{(1)} & j_1^{(2)} & \cdots & j_1^{(m)} \\ j_2^{(1)} & j_2^{(2)} & \cdots & j_2^{(m)} \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} j_2^{(1)} & j_2^{(2)} & \cdots & j_2^{(m)} \\ j_3^{(1)} & j_3^{(2)} & \cdots & j_3^{(m)} \end{pmatrix} \cdots$$

$$\cdots\begin{pmatrix} j_{\alpha-1}^{(1)} & j_{\alpha-1}^{(2)} & \cdots & j_{\alpha-1}^{(m)} \\ j_\alpha^{(1)} & j_\alpha^{(2)} & \cdots & j_\alpha^{(m)} \end{pmatrix}$$

ハ Permutation $\pi = \begin{pmatrix} j_1^{(1)} & \cdots & j_1^{(m)} \\ j_\alpha^{(1)} & \cdots & j_\alpha^{(m)} \end{pmatrix}$ ダケデ定マリ

途中ノ $j_\rho$ ニハ関係シナイ。

証明： $P = P\begin{pmatrix} j_1^{(1)} & \cdots & j_1^{(m)} \\ j_2^{(1)} & \cdots & j_2^{(m)} \end{pmatrix} \cdots P\begin{pmatrix} j_{\alpha-1}^{(1)} & \cdots & j_{\alpha-1}^{(m)} \\ j_\alpha^{(1)} & \cdots & j_\alpha^{(m)} \end{pmatrix}$

トオク。

簡単ノタメ $j_1^{(\mu)} = \mu$ ト考ヘル。定理3ニヨリ任意ノ

$\mathfrak{u} \leqq \mathfrak{a}^m$ ハ $\mathfrak{u} = \sum_{k=1}^{m}\left((\mathfrak{a}^{k-1} \cup \mathfrak{b}_k)\prod_{j=1}^{k-1}(\mathfrak{a}_j^{k-1} \cup \mathfrak{b}_{kj})\right)$ トカケ

ルガ Lemma 5, ii) Lemma 6 ニヨリ $\mathfrak{b}_p P$, $\mathfrak{b}_{ij} P$ ハ

夫々 $\pi$ ダケデキマルコトガワカルカラ $\mathfrak{u} P$ モ亦 $\pi$ ダケデキ

マルコトニナル。

—— (ツヅク) ——