1729. *Birkhoff-Khintchine* ノ *ergodic theorem* (*Kolmogoroff* ノ論文紹介)

吉田　耕作 (阪大)

Ergodentheorie ノ名デ呼バレテヰル，統計力學

ノ部門ニハ二ツノ基本定理ガアル。即チ J. von Neumann ノ mean ergodic theorem ト G.D. Birkhoff ノ ergodic theorem デアル。談話「確率論ヘノ積分方程式ノ応用」ハ迂路ヲ辿ッタケレドモ，今カラ考ヘテミルト m.e.t. ノ思想圏ヲウロツイタ訳デアリマシタ。m.e.t. ハ stochastic process ニモ応用出来ル形マデ拡張抽象化出来[1]タケレドモ，B.e.t. ハ今ノ所筆者ニハ抽象的ナ取扱ヒガ出来ナイ。勿論「抽象化ノタメニ抽象化」シタイト云フノデハアリマセン。「定理ノカラクリ」ヲ知リタイノデアリマス[2]。ソコデ文献ヲ漁ッタ訳デスガ、

i) A. Khintchine: Zur mathematischen Begründung der statistischen Mechanik. Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 13(1933) p.101–103[3]

ii) A. Kolmogoroff: Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff-Khintchineschen Ergodensatz, Rec. Math. 44, 2(1937), p.366–377.

---

(1) 角谷氏談話680，筆者談話720, 724並ビニ本号ノ角谷氏談話ヲ参照セラレタイ。

(2) 脚註(1)ニ挙ゲタ談話ニヨッテ「m.e.t.ノカラクリ」ハ明ニナッタト信ジマス。

(3) von Mises 紀念号.

ヲ得マシタ。モトモト，A. Khintchine ニヨッテ，Lebesgue 積分ノ言葉ヲ使ッテ精細化サレタ B.e.t. ノ証明ハ E. Hopf ノ名著 Ergodentheorie, p. 49 — 52 ニ出テヲリマス。上ノ i) ト ii) トハ根本ノ idea ハ之レト同ジナノデセウガ，少クトモ~~筆者~~ニハ ii) ニヨッテ「B.e.t. ノ証明ノカラクリ」丈ハハッキリシタヤウニ思ヒマス。然モ既ニ i) ニ指摘サレテヲル様ニ「steady flow ノ場合」(deterministic case) ノミナラズ，或種ノ「indeterministic case」ニモ定理ガアテハマルヤウナ形デ証明サレテアリマス。Khintchine (loc. cit.) ハ斯ク拡張スルコトニヨッテ新統計力学ノ礎石ノ一ツガ打チ下サレタト誇ッテヲリマス。以下 ii) ノ紹介ヲ致シマセウ。

§1. deterministic case ノ B.e.t.

R ヲ Lebesgue 測度ノ定義サレテアル空間トシ，$mes(R) = 1$ トスル。T ヲ R ノ R ヘノ一對一且ツ測度保存変換トスル。測度保存ト云フノハ，R ノ任意ノ可測集合 A ニ對シ $mes(A) = mes(T.A)$ ノ成立スルコトデアル。然ラバ $f(x)$ ヲ R ニ於テ積分可能ナ複素数値函数トスレバ，殆ド全テノ $x \in R$ ニ対シテ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(T\cdot x) + \cdots + f(T^{n-1}\cdot x)}{n}$$

ガ存在スル。

之レガ Khintchine ニヨッテ精細化サレタ B.e.t. デアル。$f(x)$ ガ実数値函数ノ場合ヲ証明スレバ充分デアル。ヨッテ今，$\alpha<\beta$ ナル任意ノ実数 α, β ヲトッタトキ

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{f(x)+f(T\cdot x)+\cdots\cdots+f(T^{n-1}\cdot x)}{n} > \beta, \\ \underline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{f(x)+f(T\cdot x)+\cdots\cdots+f(T^{n-1}\cdot x)}{n} < \alpha \end{cases}$$

ガ同時ニ成立ツヤウナ x ノ集合ヲ K トシ $mes(K)=0$ ガ云ヘレバヨイ。以下 $mes(K)>0$ トシテ矛盾ヲ出ス。

§2. 定理ノ証明

$\boxed{\text{方針}}$ ハ

$$(*)\quad \int_K f(x)\,dx \geqq \beta\ mes(K)$$

ヲ出スニアル。同ジ論法デ $\int_K f(x)\,dx \leqq \alpha\ mes(K)$ ガ出セルカラ $\alpha<\beta$ ニヨリ $mes(K)$ ハ矛盾ダカラ，ソノ準備トシテ

$\boxed{K\text{ ヲ適当ニ分割スルコト}}$ [(1)]。今一般ニ

$$h_{ab}(x)=\frac{f(T^a\cdot x)+f(T^{a+1}\cdot x)+\cdots\cdots+f(T^{b-1}\cdot x)}{b-a}$$

トヲリ。x ヲ fix シ，$h_{ab}(x)>\beta$ 且 $h_{ab'}(x)\leqq\beta$ for $b'<b$ ナラバ整数ヲ両端トスル interval (a,b)

---

(1) コノ論法ガ Kolmogoroff ノ巧イ所デアル。

ヲ singular interval ト呼ブ。$a < a' < b < b'$ トスルト

$$h_{ab}(x) = \frac{(a'-a)\,h_{aa'}(x) + (b-a')\,h_{a'b}(x)}{b-a}$$

ガ成立スルカラ，二ツノ singular intervals (a, b), (a', b') ガアツタトキ，片方ガ片方ヲ含ムコトハアッテモ互ニ含ミアフコトハナイ。

ソコデ正整数 s ヲ與ヘタトキニ，$b - a \leqq s$ ナル如キ singular interval (a, b) ガ存在シタトシ，若シ (a, b) ガ同ジ條件ヲ満足スル[1]如何ナル singular interval ニモ含マレナイナラバ，(a, b) ヲ s-singular interval ト呼ブ。シカラバ，與ヘラレタ x ニ對シテ s-singular interval ハ沢山アルカモ知レナイガ互ニ離レテヰル。

故ニ (1) ニヨリ，K ノ任意ノ点 x ニ対シ，s ヲ充分大キクトレバ $a \leqq 0 < b$ ナル如キ s-singular interval (a, b) ガ唯一ツ確ニ定マル。

ヨツテ s ヲ fix シ，K ノ点ノ中之点ニ對シ 0 ヲ含ム s-singular interval ガ定ル如キ点全体ヲ一マトメニシテ K_s トスルト

$$(2) \quad \lim_{s \to +\infty} K_s = K.$$

コノ K_s ハ次ノ如ク互ニ共通点ヲモタヌ K_{pq} ニ分レル：

---

(1) 即チ長サ s ヲコエナイ。

(3) $\quad K_s = \sum_{p=0,\, q=1}^{q-1,\, s} K_{pq}.$

コヽニ K_{pq} ハ対應スル s-singular interval ガ $(-p, -p+q)$ ナル如キ K_s ノ点全体ノ集合デアル。

上ノ分割ガ何故都合ガヨイカト云フト，等式

$$h_{-p,-p+q}(x) = \frac{1}{q+1}\left\{f(T^{-p}\cdot x) + f(T^{-p+1}\cdot x) + \cdots + f(T^{-p+q}\cdot x)\right\} = h_{0q}(T^{-p}\cdot x)$$

ガ成立スルカラ

$x \in K_{pq}$ ト $T^{-p}\cdot x \in K_{0q}$ トハ同等

ヲ得．従ッテ<u>測度保存</u>ト云フコトカラ

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{K_{pq}} f(x)\,dx = \int_{K_{0q}} f(T^{p}\cdot x)\,dx, \\ mes\,(K_{pq}) = mes\,(K_{0q}) \end{cases}$$

ヲ得ルニヨル。

$\boxed{(※)\text{ノ導キ方}}$ ハ最早ヤワケハナイ。即チ (3), (4) ニヨリ

$$\int_{K_s} f(x)\,dx = \sum_{p,q} \int_{K_{pq}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{p,q} \int_{K_{0q}} f(T^{p}\cdot x)\,dx = \sum_{q} \int_{K_{0q}} q\,h_{0q}(x)\,dx$$

ヲ得ルガ，(1) ト K_{0q} ノ定義カラ，$x \in K_{0q}$ ナラ $h_{0q}(x) > \beta$ ダカラ，最後ノ項

$$\geqq \sum_{q=1}^{s-1} \int_{K_{0q}} q\beta dx = \beta \sum_{q=1}^{s-1} q \, mes(K_{0q})$$

$$= \beta \sum_{q=1}^{s-1} \sum_{p=0}^{q-1} mes(K_{pq}) \quad ((4)=ヨル)$$

従ツテ，再ビ(3)ニヨルト

$$\int_{K_s} f(x)dx \geqq \beta \, mes(K_s)$$

斯クシテ(2)ニヨリ(※)ガ証明サレタ。

§3. indeterministic case ヘノ擴張

$\boxed{\text{可附番次元空間ヘノ測度ノ導入}}$[1] 実数ノ系列(……，$x_{-1}$, x_0, x_1, ……)ヲ点トスル空間 $\mathcal{R}^\infty$ ヲ考ヘル：x_n $(-\infty < n < +\infty)$ ヲ $\mathcal{R}^\infty$ ノ点 $x = (\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots)$ ノ第 n 坐標ト呼ブ。実数軸デノ可測ナ集合ヲ有限個勝手ニエラブ：之等ヲ K_{n_i} $(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ トス。

$$x_{n_1} \in K_{n_1}, \ x_{n_2} \in K_{n_2}, \cdots\cdots, x_{n_m} \in K_{n_m}$$

ヲ満足スル如キ $\mathcal{R}^\infty$ ノ点 $x = (\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots)$ ノ集合ヲ $K_{n_1}, K_{n_2}, \cdots\cdots, K_{n_m}$ ニヨツテ定メラレタ $\mathcal{R}^\infty$ ノ cylinder set ト呼ブ。$\mathcal{R}^\infty$ ノ cylinder set ノ全体ハ加法的集合 F^∞ ヲ作ル。F^∞ ヲ含ム最小ノ完全加法的集合ヲ BF^∞ トスル。$BF^\infty \ni \mathcal{R}^\infty$ ハ明カ。BF^∞ ニ於テ完全加法的ナ正ノ集合函数 $mes(A)$

$(A \in BF^{\infty})$ ガ $mes(R^{\infty}) = 1$ ナルトキ，コノ $mes(A)$ ヲ R^{∞} ノ測度ト呼ブ。

$\boxed{\text{Chance variable ノ系列}}$ 上ノ $mes(A)$ ハ，K_{n_i} $(i = 1, 2, \text{-----}, m)$ ガ全テ区間 $(-\infty, +\infty)$ ナルトキ，$K_{n_1}, K_{n_2}, \text{-----}, K_{n_m}$ デ定メラレタ cylinder set ノ mes 1 ヲ満足スルモノトナッテヰル。故ニ $mes(A)$ ハ chance variable[1] ノ組 $x_{n_1}, x_{n_2}, \text{-----}, x_{n_m}$ ノ確率ヲ與ヘル。特ニ任意ノ $K_{n_1}, K_{n_2}, \text{-----}, K_{n_m}$ デ定メラレル任意ノ cylinder set ノ mes. ガ各 K_{n_i} 丈デ定メラレル cylider sets ノ mes. ノ積ニナッテヰレバ，chance variables $x_{n_1}, x_{n_2}, \text{-----}, x_{n_m}$ ハ独立事象ヲ表ハシテヰル訳デアル。

$\boxed{\text{stationality ノ假定}}$ 斯クシテ，必ズシモ互ニ独立デナイ chance variables ノ系列 $\{x_n\}$ $(-\infty < n < +\infty)$ ヲ考ヘル。此系列ガ stationary ト云フノハ R^{∞} ノ一対一ノ変換 T：

$$
\begin{cases}
x = (\text{-----}, x_{-1}, x_0, x_1, \text{-----}) \to x' = (\text{-----}, x'_{-1}, x'_0, \\
\qquad x'_1, \text{-----}) \\
x'_n = x_{n-1}
\end{cases}
$$

ガ測度（確率）$mes(A)$ ヲ保存スルコトデアル。

然ラバ R^{∞} ノ点 $x = (\text{-----}, x_{-1}, x_0, x_1, \text{-----})$ ノ第 0 座標 x_0 ヲ点 x ノ函数ト考ヘル $(x_0 = f(x))$ ト

---

[1] Zufällige Grösze, variable aléatoire

§2ノ証明法ガソノママ使ヘル。但シソノタメニハ $f(x)$ ノ R^{∞} ニ於ケル積分可能性即チ chance variable x_0 ノ有限ナ<u>期望値</u>[1] ノ存在ヲモ假定シテヲク訳デアル。カクテ

$\boxed{\text{定理}}$ chance variables ノ系列 $\{x_n\}$ $(-\infty < n < +\infty)$ ガ

(i) stationary 且ツ

(ii) x_0 ノ期望値有限[2]

ナラバ，a ヲ fix シタトキ $b \to +\infty$ ナラシメレバ

$$h_{ab} = \frac{x_a + x_{a+1} + \cdots\cdots + x_{b-1}}{b-a}$$

ハ確実ニ（確率1ヲ以テ）収斂スル。

$\boxed{\text{注意 1}}$ 斯ウシテミルト「B. e. t. ノカラクリ」ノ一端ガ顔ヲ出シカケタヤウニ思ヘマス。chance variables ノ系列 $\{x_n\}$ ガ stationary ト云フノモ，$x_0 = f(x)$ ノ期望値有限ト云フノモ，結局 R^{∞} ニ附シタ measure（確率）ノ性質ト考ヘラレマス。即チ標語的ニ

(※※)

chance variables $\{x_n\}$ ノ statistical ナ性質 $= R^{\infty}$ ノ測度（但シ $\mathrm{mes}(R^{\infty}) = 1$）ノ性質.

---

(1) mathematical expectation.

(2) stationary ト云フコトカラ，全テノ x_n ノ期望値一致シテ了フ：$\int_{R^{\infty}} f(T^n x)\,dx$ ハ n ニ無関係

ダカラ B. e. t. ハ言ヒ直セバ，次ノ如クナルノデハナイデセウカ？

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0+x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}$$

ガ収斂シナイヤウナ点 $x=(\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots)$ ノ measure ガ 0 ニナル様ナ measure（但シ $mes(R^\infty)=1$）ヲ R^∞ ニ導入出来ル。

上ノ（＊＊）ニヨッテ，Cramer, Feller, Levy, Khintchine, Kolmogoroff 等ノ「chance variables ノ理論」ヲ少クトモ質的ニデモ見直スコトハ出来ナイデセウカ？

$\boxed{\text{注意2}}$　上定理ハ相当一般ナ結果デアリマス。chance variables x_n $(-\infty<n<+\infty)$ ガ互ニ独立ナトキニ於ケル上定理カラ「大数ノ法則」ガ容易ニ得ラレルコトハ既ニ E. Hopf ガ指摘シテヲリマス（E. Hopf 前掲書 p.56）。

$\boxed{\text{注意3}}$　B. e. t. ノ難点ヲ云ヘバ，「収斂速度」ガ何モ出テヲラナイコトデス。(1)（＊＊）ニヨッテ之点ヲ又攻究スベキデアリマス。

---

(1) m. e. t. ノ方デハ収斂速度ガ出セマス。例ヘバ Fréchet-Kryloff-Bogolioubofff 定理ノ拡張（筆者談話 679 或ヒハ角谷氏談話 680 ヲミラレタイ）。