728. W. Doeblin ノ論文紹介 I

角谷　静夫（阪大）

本号ニテハ W. Doeblin ノ論文 *Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certaines types de chaînes simple*, Bulletin mathématique de la Soc. Roumaine des Sciences, 39 (1937) ヲ紹介スル。コレハ表題ノ示ス如ク simple ナ probability ノ法則ニ従フ場合ノ点ノ運動ヲ論ジタモノデアル。論文ハ二ツノ部分ニ分レ，第一ノ論文ハ有限個（又ハ可附番個）ノ事象ノ場合 —— 所謂 Markoff ノ chain —— ヲ論ジ，第二ノ論文ハ一般ノ continuum ノ場合ヲ論ジテヰル。ココニ紹介スルノハ第二ノ論文ノ最初ノ一部デ、曩ニ吉田氏ガ紹介サレタ Fréchet 及ビ Kryloff-Bogolioùboff ノ結果* ノ擴張デアル。コレハ原論文デハ僅カ10頁ニ足ラ

---

* 紙上談話会 160号, 161号.

M. Fréchet: Sur l'allure asymptotique des densités itérés dans le problème des probabilités en chaîne, Bull. de la Soc. math. France, 62 (1934).

N. Kryloff et N. Bogolioùboff: Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky, Bull. de la Soc. math. France, 64 (1936)

又部分デアルガ書キ方ガ非常ニ concise デアル上ニ、証明ニ不完全ナ所モ多少アルノデコレヲ分リ易ク書キナホシテ紹介スルコトニシタ。

§1. 問題ノ説明

Ω ヲ與ヘラレタ点集合トセヨ。[1] Ω ノ点ヲ $x, y, z,$ ----- ニテ表ハシ、Ω ノ部分集合ヲ $E, F, G,$ ----- ニテ表ハス。Ω ノ部分集合ヲ全部考ヘルノデハナク、我々ニ必要ナノハソノウチノ一部分デアル。コレヲ Borel 集合[2] トヨブコトニシ、コレヲ $\mathfrak{B}$ デ表ハス。$\mathfrak{B}$ ハ次ノ性質ヲモッテヰルモノトスル。

(i) $\Omega \in \mathfrak{B}$, $\Lambda \in \mathfrak{B}$ (Λ ハ空集合)

(ii) $E \in \mathfrak{B}$ ナラバ $\Omega - E \in \mathfrak{B}$

(iii) $E_n \in \mathfrak{B}$ ($n = 1, 2,$ -----) ナラバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{B}.$$

今 Ω 内ノ点ガ或ル確率ノ法則ニ從ッテ運動スルモノトスル。即チ最初ニ $x \in \Omega$ ニアッタ点ガ単位時間ノ後ニ [2a]

---

(1) Ω ニ関スル topology ハ今ハ考ヘナイ。後デ必要ニナルケレドモ。

(2) Ω ニ topology ガアルトキニハコレハ Ω ノ普通ノイミノ Borel 集合ト考ヘル。

(2a) 時ガ連続的ニ変化スル必要ハナイ。即チ単位時間ハソレ以上ニ分割不可能デアッテモ差支ナイ。

$E \in \mathfrak{B}$ ニハイツテ來ル確率ガ $P(x, E)$ デアルトセヨ。コノ $P(x, E)$ ハ次ノ條件ヲ滿足スルモノトスル。

(1) $P(x, E)$ ハ運動点ガ x ニ來ル前ニドコニアッタカト云フコトニハ無關係デアル。コノトキ確率ノ法則ハ simple デアルト云フ。

(2) $P(x, E)$ ハ時刻ニハ無關係デアル。コノトキ確率ノ法則ハ temporally homogeneous デアルト云フ。

(3) $P(x, E)$ ハ x ヲ fix スルト E ニ関シテ totally additive, non-negative ナ集合函數デ且ツ $P(x, \Omega) = 1$.

(4) $P(x, E)$ ハ E ヲ fix スルト x ニ関シテ Borel-measurable デアル。即チ任意ノ real number α, β ニ對シテ $\underset{x}{E}[\alpha < P(x, E) < \beta] \in \mathfrak{B}$ デアル（但シ E ハ固定）。

此ノ如ク $P(x, E)$ ガ與ヘラレルトキ、單位時間ノ n 倍ノ經過ノ後、最初ニ x ニアッタ点ガ E ニハイッテ來ル確率 $P^{(n)}(x, E)$ ハ次ノ式ニヨッテ歸納的ニ定義サレル。

$$P^{(n)}(x, E) = \int_{\Omega} P^{(n-1)}(y, E) \cdot P(x, de_y);$$

$$P^{(1)}(x, E) \equiv P(x, E)^{(4)}$$

脚註(4)ハ次頁へ

$P^{(n)}(x, E)$ ハ又明カニ (1)—(4) ヲ満足スル函數デアル。又一般ニ

$$P^{(m+n)}(x, E) = \int_{\Omega} P^{(n)}(y, E) P^{(m)}(x, de_y)$$

ガ成立スルコトモ明カデアロウ。

我國ノ目的トスルノハ $n \to \infty$ ナルトキノ $P^{(n)}(x, E)$ ノ狀態デアル。コレガ何カニ收斂シテ呉レレバ非常ニ都合ガヨイガ、ソレハ一般ニハ駄目デアル。ヨッテ又

$$\Pi^{(n)}(x, E) \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P^{(m)}(x, E)$$ トオイテ $\Pi^{(n)}(x, E)$

ノ $n \to \infty$ ナルトキノ狀態ヲモシラベル必要ガアル。シカシコレモ條件ナシデハ一般ニハ成立シナイ。*Doeblin* ハコヽニ次ノ條件ヲ入レテオキル。

(※) Ω デ定義サレタ *measure* $m(E)$ ヲ適當ニトレバ、コレニ對シテ *integer* N, *positive number*

---

(4) Ω デ定義サレタ *totally additive* ナ集合函數 $\varphi(E)$ 及ビ *Borel-measurable* ナ有界ナ函數 $f(x)$ ニ對シテ積分 $\int_{\Omega} f(x) \varphi(de_x)$ ハ次ノ如ク定義サレル。

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(de_x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} \varphi(E_{m,k}).$$

$$E_{m,k} = \underset{x}{E}\left[\frac{k}{m} \leqq f(x) < \frac{k+1}{m}\right].$$ ($f(x)$ ハ有界デアルカラ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ ハ實ハ有限個ノ和トナル)。

$b, \eta > 0$ ガ存在シテ x ニ關シテ uniformly ニ

$$m(E) < \eta \text{ ナラバ } \quad P^{(N)}(x, E) < 1 - b.$$

トナル。

コヽニ $m(E)$ ガ Ω デ定義サレタ measure デアルト云フノハ、$m(E)$ ガ任意ノ $E \in \mathcal{L}$ ニ對シテ定義サレタ totally additive, non-negative ナ集合函數デ且ツ $m(\Omega) = 1$ トナルコトデアル。

コノ條件ガ Fréchet ノ條件ヨリ一般デアルコトハ容易ニワカル。實際 Fréchet ハ、アル measure $m(E)$ ニ對シテ

$$P(x, E) = \int_E p(x, y)\, m(de_y)$$

ト書キ得テ、且ツ $p(x, y)$ ガ有界トナルコトヲ假定シテヰルカラ、$p(x, y) \leqq M$ トスレバ $\eta < \dfrac{1-b}{M}$ 對シテ

$$m(E) < \eta \rightarrow P(x, E) \leqq \eta M < 1 - b$$

トナル。

Doeblin ハコノ條件ノ下ニ $P^{(n)}(x, E)$ ノ $n \rightarrow \infty$ ナルトキノ狀態ニ關シテ色々面白イ結果ヲ得テヰル。Doeblin ノ結果ガ、コノ方面ノ結果トシテハ現在ノ所一バン詳シイ結果デアリ、且ツソノ條件ガ他ノモノニ比シテ緩イモノデアルコトハ注目ニ値スル。

Doob[5] ハ最近、同樣ナ問題ヲ取リ扱ッテ色々ナ結果ヲ得テヰルガ Doob ノ條件ハ Doeblin ノ條件ヨリハ強イノデアル。即チ Doob ハ任意ノ $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$

$\cdots\cdots \supset E_n \supset \cdots\cdots, \prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0$ ナル如キ系列 $\{E_n\}$ ($E_n \in \mathfrak{L}, n = 1, 2, \cdots\cdots$) ニ對シテ $P(x, E_n) \to 0$ ガ x ニ關シテ一様ニ成立スルコトヲ要求シテキルガ、コレハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\eta > 0$ ガ定マッテ $m(E) < \eta \to P(x, E) < \varepsilon$ トナルト云フコトト同等デアルカラ Doeblin ノ條件ヨリ遥カニ強イノデアル。シカシ、Doob ノ論文ハ infinite product space ヲ考ヘル方法ガ旨イノデアルカラ、ソレダケデ十分興味ガアルノデアル。

尚ホツイデナガラ、Doob ノ論文デハ deterministic デナイ場合ノ Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ論ジテキルノデアルガ、コレハ既ニ Khinchine-Kolmogoroff ニヨッテ論ジラレテキルモノデアッタ(本号ノ吉田氏ノ談話参照)。Doob ノ旨イ所ハ原ノ空間 Ω ノ measure ト product space $\prod_{-\infty}^{\infty} \Omega_n$ ノ measure トノ関係ヲツケル所デアロウ。

最後ニ、Doeblin ノ條件ハ、マダ強スギルヤウナ氣ガスル。

---

(15) J. L. Doob: Stochastic processes with an integralvalued parameter, transaction Amer. Math. Soc. 44 (1938).

例ヘバ、コレデハ Kryloff-Bogolioùboff ノ場合[6]ヲ含マナイノデアル。(勿論 Kryloff-Bogolioùboff ノ場合ハ topology ニ関スル條件ハアルガ。

§2. 結果

條件(※)カラドレダケノ結果ガ得ラレルカ。Doeblin ノ得タ結果ヲカヽゲル。ソノタメニ先ヅ final set (ensemble finale) ヲ定義スル。

<u>定義</u> $G \in \mathfrak{L}$ ハ次ノ條件ヲ満足スルトキ final set デアルト云フ。

(i) $x \in G$ ナラバ $P(x, G) = 1$ 又ハ $P(x, \Omega - G) = 0$. 即チ $x \in G$ ナル点ガ G カラ外ヘ出ル確率ハ 0 デアル。

(ii) 任意ノ $x \in G$ 及ビ $E \subset G$ $(E \in \mathfrak{L})$ ニ對シテ若シ $m(E) > 0$ ナラバ $n = n(x, E)$ ガ定マッテ $P^{(n)}(x, E) > 0$. 大ザッパニ云ヘバ G ノ各点ハ G ノ中ヲ到ルトコロ<u>ウロツク</u>ノデアル。

カヽル final set ガ存在スルコトハ証明ヲ要スル

---

(6) N. Kryloff et N. Bogolioùboff: La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la méchanique non linéaire, Annals of Math., 38(1937)

ガ、若シ存在シテモ有限個シカナイコトハ容易ニワカル。何トナレバ條件(i)ヨリ $x\in G$ ナラバ $P^{(N)}(x, G)=1$ デアルカラ(※)ニヨツテ $m(G)\geqq\eta$ デナケレバナラナイ。$m(E)=0$ ナル集合 E ハ無視スルコトニスレバ相異ナル final set ハ互ニ共通点ヲモタナイカラ、final set ハ有限 $(\leqq[\frac{1}{\eta}])$ 個シカ存在シナイ。

$\boxed{\text{定理}}$ 條件(※)ノ下ニ次ノコトガ成立スル：Ω 内ニ有限個ノ final set G_α $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,p)$ ガ存在シテ

(i) 任意ノ $x\in\Omega$ ニ對シテ $P^{(n)}(x, \Omega-\sum_{\alpha=1}^{p}G_\alpha)\to 0$ デアル。シカモコレハ x ニ關シテ一様デ且ツ exponential ノ order デアル。即チ x ニ無關係ナ常數 M, τ $(0<\tau<1)$ ガ存在シテ任意ノ $x\in\Omega$ ニ對シテ

$$P^{(n)}(x, \Omega-\sum_{\alpha=1}^{p}G_\alpha)<M\cdot\tau^n,\quad n=1,2,\cdots\cdots$$ ガ成立スル。

(ii) 更ニ Ω[(6a)] ガ Euclid 空間内ノ集合デ $m(E)$ ガ普通ノ Lebesgue ノ measure デアレバ各々ノ G_α ニハ次ノ如キ integer $d_\alpha\geqq 1$ ガ對應スル：

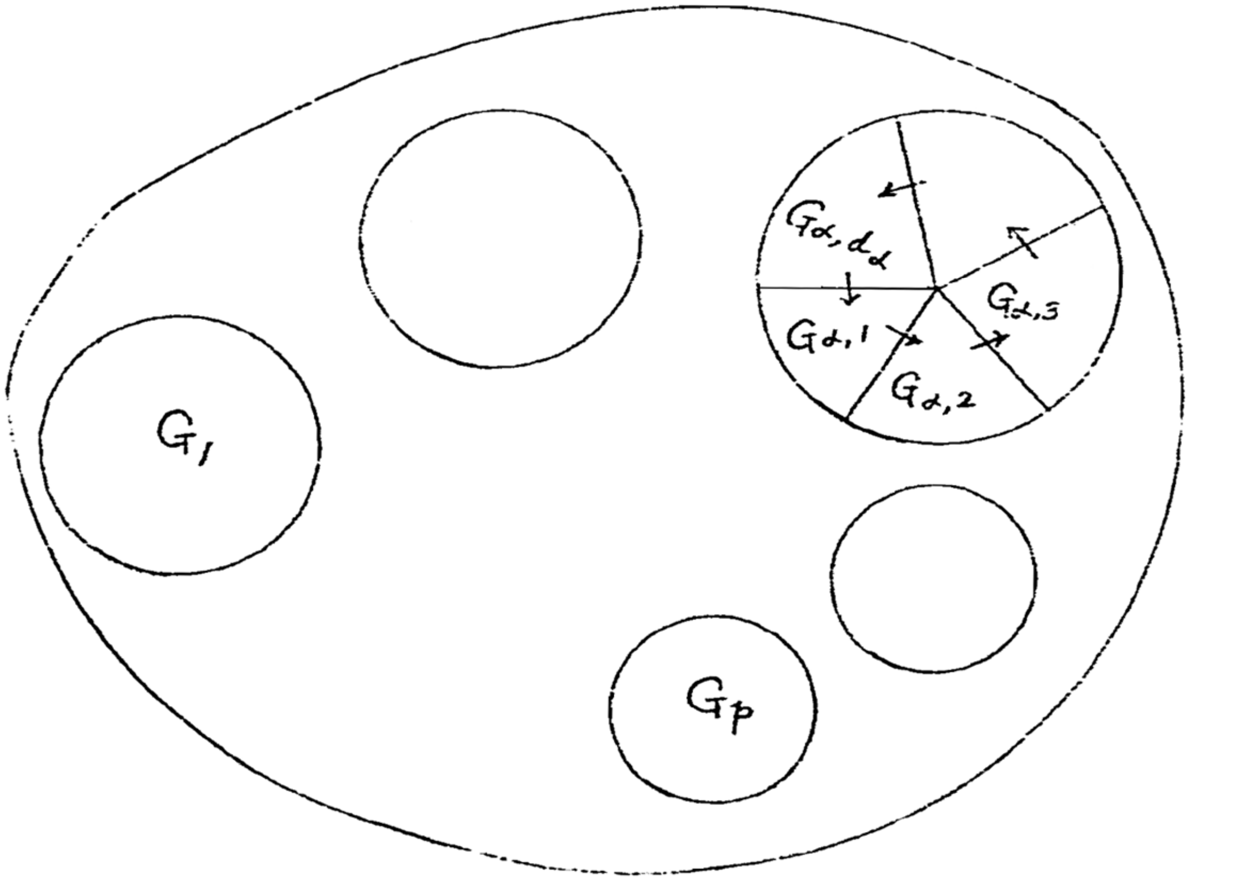
$d_\alpha=1$ ナルトキ、コノ時ハ任意ノ $x\in G_\alpha$, $E\subset G_\alpha$ $(E\in\mathfrak{L})$ ニ對シテ $\lim_{n\to\infty}P^{(n)}(x, E)=P(E)$ ガ

(6a) コノ條件ハ必ズシモ必要デナク一般ノ measure ノ場合デモ或ル程度ノ條件ガアレバヨイ。§4. 參照。

存在スル。且ツコノ收斂ハ x ニ關シテ一様ニシテ exponential ノ order デアル、即チ $|P^{(n)}(x, E) - P(E)| < M \cdot \tau^n$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ガ成立スル如キ常數 M, τ ($0 < \tau < 1$) ガ存在スル。

$d_\alpha > 1$ ナルトキ　コノ時ハ G_α ハ d_α 個ノ部分（互ニ共通點ノナイ）$G_{\alpha, i}$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots, d_\alpha$) ニワカレテ、任意ノ $x \in G_{\alpha, i}$ ニ對シテ $P(x, G_{\alpha, i+1}) = 1$ トナル。($i = 1, 2, \cdots\cdots, d_\alpha$; 但シ $i = d_\alpha$ ナルトキハ $i+1 = 1$ ト考ヘル)。即チ $x \in G_{\alpha, i}$ ナラバ x ハ單位時間ノ後確實ニ $G_{\alpha, i+1}$ ニハイルノデアル。

大ザッパニ云ヘバ G_α ノ中デ x ハ cyclic (period d_α) ノ運動ヲシテヰル。ヨッテ單位時間ノ d_α 倍ノ後ヲ考ヘレバ各々ノ $G_{\alpha, i}$ ノ點ハソレ自身ノ中ヘ確實ニハイッテ



求ル。ヨッテ $P^{(d_\alpha)}(x, E)$ ニ関シテ各々ノ $G_{\alpha,i}$ ハ final set トナリ、シカモ $d=1$ ノ case トナル。即チ任意ノ $x \in G_\alpha$ ニ對シテ

$\lim_{n\to\infty} P^{(nd_\alpha)}(x, E)$ ハ存在シテ、シカモソノ收斂ハ x ニ関シテ一様，且ツ exponential ノ order デアル。

ヨッテ又コレヨリ

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}(x, E) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P^{(m)}(x,E)$$

ガ任意ノ $x \in G_\alpha$，$E \subset G_\alpha$（$E \in \mathfrak{L}$）ニ對シテ x ニ関シテ一様ニ成立スルコトガワカル。

§3. final set

定理ノ証明ヲスルタメ先ヅ final set ノ存在ヲ証明スル。任意ノ $x \in \Omega$ ニ對シテ $P(x, E)$ ハ、E ヲ variable ト考ヘレバ totally additive, non-negative ノ集合函数デ且ツ $P(x, \Omega) = 1$ デアル。ヨッテ $P(x, E) = 1$，$E \in \mathfrak{L}$ ナル集合 E ニテ $m(E)$ ノ最小ナルモノガ存在スル。コレヲ $E_1(x)$ トセヨ。(11) $E_1(x)$ ハ一般ニハ

---

(11) $P(x, E) = 1$，$E \in \mathfrak{L}$ ナル E ニ関スル $m(E)$ ノ下限ヲ α トシ $P(x, E_n) = 1$，$m(E_n) < \alpha + \frac{1}{2^n}$ ナル $E_n \in \mathfrak{L}$ ヲ求リ $E_1(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n \equiv \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E_n$ トオケ。$m(E_1(x)) = \alpha$ ニテ且ツ $P(x, E_1(x)) = 1$ デアル。

unique ニハ定マラナイガ $m(E)=0$ ナル集合ヲ除イテ unique ニ定マル。同様ナ集合ハ $P^{(n)}(x, E)$ ニ對シテモ定マル。コレヲ $E_n(x)$ トセヨ。$E(x)=\sum_{n=1}^{\infty} E_n(x)$ トオケバ $E(x) \in \mathfrak{L}$ デアッテ且ツ $E(x)$ ハ次ノ性質ヲモツ。

(i) $P^{(n)}(x, E(x))=1, \quad n=1, 2, \cdots\cdots$

(ii) 任意ノ $E \subset E(x)$, $E \in \mathfrak{L}$, $m(E)>0$ ナル集合 E ニ對シテ $n=n(E)$ ガ定マリ $P^{(n)}(x, E)>0$ トナル。

(i) ハ明カデアル。(ii) ハ次ノ様ニシテ證明サレル。先ヅ $m(E)>0$ ナルコトヨリ少クトモ一ツノ n ニ對シテ $m(E \cdot E_n(x))>0$. ヨッテ $E_n(x)$ ノ定義ヨリ $P^{(n)}(x, E_n(x)-E \cdot E_n(x))<1$. シタガッテ

$$P^{(n)}(x, E) \geqq P^{(n)}(x, E \cdot E_n(x))>0$$

此ノ如キ性質 (i), (ii) ヲモツ集合 $E(x) \in \mathfrak{L}$ ヲ x ノ consequent set (ensemble conséquent) ト呼ブ。任意ノ $x \in \Omega$ ニ對シテソノ consequent set ガ存在スルコトハ上記ノ如ク證明サレ、且ツソレハ明ラカニ $m(E)=0$ ナル集合ヲ除ケバ unique ニ定マル。

今 $E \in \mathfrak{L}$ ヲ與ヘタトキ、コレガ任意ノ $x \in E$ ナル点 x ニ対スル consequent set ニナッテヰレバ E ガ求ムル final set ニナルワケデアルカラ (final set ノ定義參照) コレデ證明ハ終ルガ、一ツノ $x \in E$ カラソノ consequent set $E(x)$ ヲ作ッタダケデハ

$E(x)$ ハ必ズシモコノ性質ヲモタナイノデアル。或ル $y \in E(x)$ ニ對シテソノ consequent set $E(y)$ ヲ作レバ $m(E(y)) < m(E(x))$ トナッテキルカモ知レナイノデアル。

又、$y \in E(x)$ ナルトキ $E(y) \subset E(x)$ トナルコトスラ明カデナイノデアル。トコロガ實際ハ $E(y) \subset E(x)$ ガ成立シナイヤウナ $y \in E(x)$ ハ若シ存在スルトシテモ、カヽル y 全体ノ集合 E^* ハ $m(E^*) = 0$ トナルコトガ証明出來、シカモ $E(x)$ ノ代リニ $E(x) - E^*$ ヲ考ヘテモヤハリ x ノ consequent set ニナッテキルコトガ証明出來ルカラ、始メカラ $E(x)$ ノ代リニ $E(x) - E^*$ ヲ考ヘルコトニスレバ任意ノ $y \in E(x)$ ニ対シテ $E(y) \subset E(x)$ [17] デアルト假定シテヨイノデアル。

<u>$m(E^*) = 0$ ナルコトノ証明</u>　$y \in E^*$ ハ少クトモ一ツノ n ニ對シテ $P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) > 0$ トナルコトト同ジデアルカラ、$P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) > 0$ トナル如キ y ノ集合ヲ E_n^* トスレバ $E^* = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*$ デアル。

ヨッテ $m(E^*) > 0$ トスレバ少クトモ一ツノ n ニ對シテ $m(E_n^*) > 0$。 次ニ $P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) > \frac{1}{m}$ トナル如キ y ノ集合ヲ $E_{n,m}^*$ トスレバ $E_n^* = \sum_{m=1}^{\infty} E_{n,m}^*$ デアルカラ

---

(17) $E(y)$ ハ勿論 unique デナイカラ $E(y) \subset E(x)$ トナラヌモノモ作リ得ル。シカシコヽデハ適當ニ $E(y)$ ヲトレバ $E(y) \subset E(x)$ トナルコトヲ云フ。

少クトモ一ツノ m ニ對シテ $m(E^*_{n,m})>0$。$E^*_{n,m}\subset E(x)$, $m(E^*_{n,m})>0$ デアルカラ $E(x)$ ノ定義ニヨリ $N=N(E^*_{n,m})$ ガ存在シテ $P^{(N)}(x, E^*_{n,m})>0$.

ヨッテ $P^{(N+n)}(x, \Omega-E(x))=\int_{\Omega}P^{(N)}(x, de_y)P^{(n)}(y, \Omega-E(x))$

$$\geqq\int_{E^*_{n,m}}P^{(N)}(x, de_y)P^{(n)}(y, \Omega-E(x))\geqq\frac{1}{m}\int_{E^*_{n,m}}P^{(N)}(x, de_y)$$

$$=\frac{1}{m}P^{(N)}(x, E^*_{n,m})>0.$$

コレハ $P^{(N+n)}(x, E(x))=1$ ($E(x)$ ノ定義!) ニ矛盾スル。ヨッテ $m(E^*)=0$ デナケレバナラヌ。

<u>$E(x)-E^*$ ガ又 x ノ consequent set ナルコト</u>.

コレヲ示スニハ任意ノ N ニ対シテ $P^{(N)}(x, E(x)-E^*)=1$ トナルコト又ハ $P^{(N)}(x, E^*)=0$, $N=1, 2, \cdots\cdots$ トナルコトヲ示セバヨイ。然ルニ $E^*=\sum_{n=1}^{\infty}E^*_n$ デアルカラ、若シ $P^{(N)}(x, E^*)>0$ ナラバ少クトモ一ツノ n ニ對シテ $P^{(N)}(x, E^*_n)>0$. ヨッテ又 $E^*_n=\sum_{m=1}^{\infty}E^*_{n,m}$ ナルコトヲ考ヘレバ少クトモ一ツノ m ニ對シテ $P^{(N)}(x, E^*_{n,m})>0$.

ヨッテ前ト同様ニシテ $P^{(N+n)}(x, \Omega-E(x))$

$$=\int_{\Omega}P^{(N)}(x, de_y)P^{(n)}(y, \Omega-E(x))$$

$$\geqq\int_{E^*_{n,m}}P^{(N)}(x, de_y)P^{(n)}(y, \Omega-E(x))\geqq\frac{1}{m}P^{(N)}(x, E^*_{n,m})>0.$$

コレハ $E(x)$ ノ定義ニ矛盾スル。

以上

以上ノ議論ニヨッテ、任意ノ $x \in \Omega$ ニ対シテソノ consequent set $E(x) \in \mathfrak{L}$ ガ存在シテ任意ノ $y \in E(x)$ ニ對シテ $E(y) \subset E(x)$ トナルコトガワカッタ。條件 (*) ヨリ明ラカニ $m(E(x)) \geqq \eta$ デアル。

次ニコノ $E(x)$ ニ對シテ $m(E(y)) < m(E(x))$ トナル如キ $y \in E(x)$ ガ存在スルカドウカヲ調ベル。モシカヽル y ガ存在シナケレバ $E(x)$ ハ明カニ一ツノ final set デアル。ヨッテ証明ハコレデ終ル。又モシカヽル y ガ存在スレバコレヲ x_1 トスル。

コノ x_1 ニ對シテ $E(x_1)$ ヲ作レバ $E(x_1) \subset E(x)$, $m(E(x_1)) < m(E(x))$ デアル。シカモ $E(x_1)$ ハ前ト同様ニシテ、任意ノ $y \in E(x_1)$ ニ對シテ $E(y) \subset E(x_1)$ トナルヤウニ作ルコトガ出来ル。次ニコノ $E(x_1)$ ニ對シテ $y \in E(x_1)$ ニテ $m(E(y)) < m(E(x_1))$ トナルヤウナ y ガアルカドウカヲ調ベル。モシカヽル y ガ存在シナケレバ証明ハコレデ終ル。又モシカヽル y ガ存在スレバコレヲ x_2 トスル。

以下同様ニシテ進メバ、コノ操作ガドコカデ終ラナケレバ x_n $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ガ $x_{n+1} \in E(x_n)$, $m(E(x_{n+1})) < m(E(x_n))$, $E(x_{n+1}) \subset E(x_n)$ ニテ且ツ任意ノ $y \in E(x_n)$ ニ對シテ $E(y) \subset E(x_n)$ トナル如ク選ベル。コノ操作ガドコカデ終レバ final set ノ存在ガ証明サレルカラドコマデモコノ操作ガツヾクト假定スル。$\prod_{n=1}^{\infty} E(x_n) = E_\omega(x)$ トオケ。任意ノ $y \in E_\omega(x)$

ニ對シテ $E(y) \subset E_\omega(x)$ トナル。コレハ各々ノ n ニ對シテ $E(y) \subset E(x_n)$ トナルコトヨリ明カ。ヨッテ $x_{\omega+1} \in E_\omega(x)$ ヲ取ッテ前ト同ジヤウニ $x_{\omega+2}, x_{\omega+3}, \cdots\cdots$ ヲ作ッテ行クコトガ出來ル。コノ操作ハドコカデ終ラナケレバ任意ノ順序數 $\alpha < \Omega$ ニ對シテ $x_{\alpha+1}$ ヲ作ルコトガ出來、且ツ $\alpha < \beta < \Omega$ ナラバ $m(E(x_{\alpha+1})) > m(E(x_{\beta+1})) > 0$ デアルカラコレハ矛盾デアル。ヨッテコノ操作ハドコカデ終リ、final set ガ存在スル。[8]

---

(8) Tranfinite induction ヲ避ケルタメニハ次ノヤウニスレバヨイ。先ヅ $E(x)$ ヲ任意ノ $y \in E(x)$ ニ對シテ $E(y) \subset E(x)$ トナル如ク定メテ、アラユル $y \in E(x)$ ニ関スル $m(E(y))$ ノ下限ヲ考ヘル。コレヲ α_1 トスレバ $\alpha_1 \geqq \eta$ デアル。$x_1 \in E(x)$ ヲ $m(E(x_1)) < \alpha_1 + \frac{1}{2}$ ナル如クトル。一般ニ x_n, $E(x_n)$ ガ任意ノ $y \in E(x_n)$ ニ対シテ $E(y) \subset E(x_n)$ トナル如ク定マッタトキ、カヽル y ニ対スル $m(E(y))$ ノ下限ヲ α_n トスル。$\alpha_n \geqq \alpha_{n-1} \geqq \cdots\cdots \geqq \alpha_1$ デアル。$x_{n+1} \in E(x_n)$ ヲ $m(E(x_{n+1})) < \alpha_n + \frac{1}{2^n}$ トナル如ク選ブ。此ノ如クシテ順次 x_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ作リ $\prod_{n=1}^{\infty} E(x_n) \equiv G$ トオケバ G ハ final set デアル。何トナレバ任意ノ $y \in G$ ニ対シテ $E(y) \subset G$ トナルコトハ $E(y) \subset E(x_n)$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ヨリ明カ，次ニ $m(E(y)) = m(G)$ トナルコトハ $m(E(y)) \geqq \alpha_n > m(E(x_{n+1})) - \frac{1}{2^n} \geqq m(G) - \frac{1}{2^n}$ トナルコトヨリワカル。以上

此ノ如クシテ final set ノ存在ガ証明サレタ。final set G ガ $m(G) \geqq \eta$ ヲ満足シ、シタガッテ final set ハ有限個[9]シカ存在シナイコトハ既ニ示シタ如ク殆ド明カデアル。次ニ定理ノ性質(i)ヲ証明シヨウ。

Ω 内ニアル final set 全体ヲトリ $G_1, G_2, \ldots\ldots, G_p$ トセヨ。$G_i \cdot G_j = \Lambda \ (i \neq j)$ デアル。$\Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha = \Lambda$ ナラバ (i) ハ明カ。ヨッテ $\Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha \neq \Lambda$ トスル。先ヅ任意ノ $x \in \Omega$ ニ対シテ $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha)$ ヲ考ヘルトコレハ少クトモ一ツノ n ニ対シテ >0 トナル。何トナレバ若シスベテノ n ニ対シテ $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha) = 0$ デアレバ

$E(x) \subset \Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha$ トナッテ、コノ $E(x)$ ノ中ニ(前ニ証明シタコトニヨッテ consequent set $E(x)$ ノ中ニハ少クトモ一ツ final set ガアル!) 一ツノ final

---

(9) 二ツノ final set ハ $m(E)=0$ ナル集合ヲ除イテ一致スルカ又ハ共通点ヲ全然モタナイ。何トナレバ二ツノ final set G_1, G_2 ニ共通点 x ガアッタトスレバ、若シ $m(G_1 - G_1 \cdot G_2) > 0$ ナラバ x ガ G_1 ノ点ナルコトヨリ少クトモ一ツノ n ニ対シテ $P^{(n)}(x, G_1 - G_1 \cdot G_2) > 0$. 然ルニコレハ $x \in G_2$ ナルコトヨリ矛盾デアル。同様ニ $m(G_2 - G_1 \cdot G_2) > 0$ トシテモ矛盾ヲ生ジルカラ $m(G_1 - G_1 \cdot G_2) = m(G_2 - G_1 \cdot G_2) = 0$ デナケレバナラナイ。

set ガアルコトニナリ、$G_1, G_2, \cdots\cdots, G_p$ ガスベテノ final set ヲ盡シテヰルト云フコトニヨツテ矛盾スル。ヨツテ各々ノ $x \in \Omega$ ニ對シテ少クトモ一ツノ $n = n(x)$ ガ定マツテ $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha) > 0$。ヨツテ各々ノ n ニ對シテ $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha) > 0$ トナル如キ x ノ集合ヲ E_n デ表ハセバ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. 且ツ G_α ガ final set ナルコトヨリ $E_n \subset E_{n+1}$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$)。ヨツテ十分 M ヲ大キクトレバ $m(\Omega - E_M) < \frac{\eta}{2}$ トナル。次ニ $P^{(M)}(x, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha) > \frac{1}{m}$ トナル如キ x ノ集合ヲ $E_{M,m}$ トスレバ $E_{M,m} \subset E_{M,m+1}$ ($m = 1, 2, \cdots\cdots$) ニテ且ツ $E_M = \sum_{m=1}^{\infty} E_{M,m}$ デアルカラ m ヲ十分大キクトレバ $m(\Omega - E_{M,m}) < \eta$. トナル。條件 $(*)$ ト $m(\Omega - E_{M,m}) < \eta$ ナルコトヨリ任意ノ $x \in \Omega$ ニ對シテ $P^{(N)}(x, \Omega - E_{M,m}) < 1 - b$ 又ハ $P^{(N)}(x, E_{M,m}) > b > 0$。ヨツテ任意ノ $x \in \Omega$ ニ對シテ

$$P^{(N+M)}(x, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha) = \int_{\Omega} P^{(N)}(x, de_y) P^{(M)}(y, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha)$$

$$\geqq \int_{E_{M,m}} P^{(N)}(x, de_y) P^{(M)}(y, \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha)$$

$$\geqq \frac{1}{m} \int_{E_{M,m}} P^{(N)}(x, de_y) = \frac{1}{m} P^{(N)}(x, E_{M,m})$$

$$\geqq \frac{b}{m}$$

ヨッテ

$$\underline{P}^{(N+M)}\left(x,\ \Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha\right) \leqq 1 - \frac{b}{m}$$

ガ x ニ関シテ一様ニ成立スル。コレヨリ G_α ガ final set ナルコトヨリ

$$P^{2(N+M)}\left(x,\ \Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha\right) = \int_{\Omega} P^{(N+M)}(x, de_y) P^{(N+M)}\left(y, \Omega - \sum_{\alpha=1}^{b} G_\alpha\right)$$

$$= \int_{\sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha} + \int_{\Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha} = \int_{\Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha} P^{(N+M)}(x,\ de_y) \cdot \underline{P}^{(N+M)}\left(y, \Omega - \sum_{\alpha=1}^{b} G_\alpha\right)$$

$$\leqq \left(1 - \frac{b}{m}\right) \int_{\Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha} P^{(N+M)}(x, de_y) \leqq \left(1 - \frac{b}{m}\right)^2$$

同様ニシテ一般ニ

$$P^{n(N+M)}\left(x,\ \Omega - \sum_{\alpha=1}^{p} G_\alpha\right) \leqq \left(1 - \frac{b}{m}\right)^n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ヨッテ求ムル如キ M, て ガ存在スルコトガワカル。