725. Jordan領域ノstabilitéトCapacité,（III）

井上　正雄（阪大）

Capacitéハ勿論 Frostman, de la Vallée Poussin ノ意味ニトル。

Jordan領域 $\mathfrak{D}$ ノ境界点 p ヨリノ距離ガ λ^{n+1}, λ^{n} ノ間ニアリ且ツ $\overline{\mathfrak{D}}$ ニ含マレザル点集合（開）ノcapacitéヲ γ_n トスルトキ次ノ定理ガ成立スル。[1]

定理7.

p ガ stable ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$$

ガ発散スルコトデアル。

（注）充分條件トシテハ，アル一ツノ λ ニツイテ発散スレバヨイシ，必要條件トシテハ、スベテノ λ ニツイテ成立スル。Keldych, Lawrentieff ハ $\lambda=\frac{1}{2}$ ノ場合ヲC.R.（loc. cit）ニ証明ナシニ述ベテイル。

（証）先ヅ $0<\lambda<1$ ナルアル一ツノ λ ニ對シテ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} = +\infty$ トシヤウ。p ヨリノ距離ガ $\lambda^{\frac{n+1}{2}}$, $\lambda^{\frac{n}{2}}$ ノ間

(1) 証明ハ O.D. Kellogg. Fondation of Potential theory, P.331–P.334 ニアル方法ヲ用ヒタ。従ッテアマリ感心シタ証明デハナイヤウデアル。

ニアリ且ツ $\overline{\mathcal{O}}$ ニ含マレザル点集合ヲ $e(\lambda^{\frac{n+1}{2}}, \lambda^{\frac{n}{2}})$ デ表ハスコトニシ，$\sigma_n = C(e(\lambda^{\frac{n+1}{2}}, \lambda^{\frac{n}{2}}))$ トスルトキ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \infty$ トナルコトヲ先ヅ証明シマス。

$e(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})$ ニ含マレル régulier 且ツ $\lim_{i\to\infty} e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})$ トナル領域列 $\{e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})\}$ ヲ考フレバ

$$C(\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n}))$$
$$\leqq C(\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})\cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}}) + C(\overline{\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n}) - \bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})\cdot C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

各境界点ガ定理1ノ條件ヲ満足スル如ク $e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})$ ヲ撰ンデオケバ定理2及ビ領域ノ境界点ガ全部 stable ナラバ領域モ stable トナルコトヨリ。

$$\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})\cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}},\quad \overline{\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n}) - \bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})\cdot e_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}}$$

ニ含マレ且ツ之レニ近似スル régulier ナ領域列 $\{\Delta_j^{(1)}\}$, $\{\Delta_j^{(2)}\}$ ヲ夫々撰ビ，

$$\lim_{j\to\infty} C(\overline{\Delta_j^{(1)}}) = C(\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})\cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$
$$\lim_{j\to\infty} C(\overline{\Delta_j^{(2)}}) = C(\overline{\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n}) - \bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})\cdot C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

ナラシメ得ル。故ニ $\varepsilon_n > 0$ ヲ與ヘタトキ，j ヲ適當ニ撰ビ

$$C(\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})) - \varepsilon_n \leqq C(\overline{\Delta_j^{(1)}}) + C(\overline{\Delta_j^{(2)}})$$

ナラシメ得ル。

$$\therefore\ C(\bar{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^{n})) - \varepsilon_n$$

$$\leqq C\left(e\left(\lambda^{\frac{2n+2}{2}},\lambda^{\frac{2n+1}{2}}\right)\right)+C\left(e\left(\lambda^{\frac{2n+1}{2}},\lambda^{\frac{2n}{2}}\right)\right).$$

即チ $\gamma_n-\varepsilon_n\leqq\sigma_{2n+1}+\sigma_{2n}$

$$\therefore\quad \frac{\gamma_n-\varepsilon_n}{\lambda^n}\leqq\frac{\sigma_{2n+1}}{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}+\frac{\sigma_{2n}}{\lambda^{\frac{2n}{2}}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{\lambda^n}<\infty$ ナル如ク最初ニ $\{\varepsilon_n\}$ ヲ撰ブコトガ出来ルカラ，結局

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n}{\lambda^{\frac{n}{2}}}=\infty$$

ヲ得ル。

依ツテ $1>\varepsilon>0$ ヲ任意ニ與ヘタトキ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\lambda^n}=\infty$ 且 $1>\lambda>1-\varepsilon$ ナル如ク λ ヲ撰ブコトガ出来ル。更ニ K ヲ $\lambda^{K-1}<\varepsilon$ ナル如ク撰ブ。シカルトキ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_{Ki}}{\lambda^{Ki}},\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_{Ki+1}}{\lambda^{Ki+1}},\ \cdots\cdots,\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_{K(i+1)-1}}{\lambda^{K(i+1)-1}}$$

ノウチ何レカ少クトモ一ツノ級數ガ發散シナケレバナラヌ。

故ニ $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_{Ki}}{\lambda^{Ki}}$ ガ發散スルモノトシマウ。（他ノ級數ニツイテモ同樣）。

次ニ任意ニ $\rho>0$ ヲトリ $\lambda^{Km}<\rho$ ナル如ク m ヲ定メル。$e_j(\lambda^{n+1},\lambda^{n})$ ヲ夫々ノ n ニ対シテ適當ニトリ，$\gamma_n^{*}=C(\overline{e}_j(\lambda^{n+1},\lambda^{n}))$ トスルトキ $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_{Ki}^{*}}{\lambda^{Ki}}=\infty$ ナ

ラシメ得ル。

サテ次ニ一般ニ $e_j(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ノ potentiel conducteur ヲ v_n トシ

$$\nabla_{m,m'} = \sum_{i=m}^{m'} v_{\kappa i} \quad (m' \geqq m \text{ ニシテ } m' \text{ ハ後ニ定ム})$$

トスレバ, コノ函数ハ $C_{m,m'} = \sum_{i=m}^{m'} \overline{e}_j(\lambda^{\kappa i+1}, \lambda^{\kappa i})$ ノ点ヲ除イテ調和且ツコノ境界ヲコメテ連続トナル。

更ニ $\overline{e}_j(\lambda^{\kappa n+1}, \lambda^{\kappa n})$ ノ境界上デハ, $v_{\kappa n} = 1$, 且ツ $i \neq n$ ナラバ

$$v_{\kappa i} \leqq \frac{1}{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})} \cdot \frac{\gamma^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}}$$

トナル。(2)

故ニ $e_{m,m'}$ ノ境界上デハ

$$\nabla_{m,m'} \leqq 1 + \frac{1}{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})} \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}} < \frac{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}}}{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})}$$

$$\nabla'_{m,m'} = \frac{\lambda(1-\lambda^{\kappa-1})\nabla_{m,m'}}{1 + \sum_{i=n}^{m'} \frac{\gamma^*_{\kappa i}}{\lambda^{\kappa i}}}$$

トオケバコノ調和函数ハ $e_{m,m'}$ ノ境界上デ常ニ $\leqq 1$ デアル。

---

(2) 一般ニ閉集合 F ノ potentiel conducteur ヲ ∇ トスルトキ $\dfrac{C(F)}{\underset{z \in F}{\mathrm{o.g.}d(p,z)}} \leqq \nabla(p) \leqq \dfrac{C(F)}{\underset{z \in F}{\mathrm{n.G.}d(p,z)}}$ ガ成立スル。

(O.D. Kellogg. loc. cit p. 331)

次ニ $\{\mathfrak{D}^2_{n,\rho}\}$[3] ヲ考ヘ n ヲ充分大キクトレバ $\overline{C_\rho}$ 内ノ $\mathfrak{D}^2_{n,\rho}$ ニ含マレナイ閉集合 $\mathfrak{D}^{2*}_{n,\rho}$ ガ $e_{m,m'}$ ヲ含ムヤウニスルコトガ出来ル。コノ閉集合 $\mathfrak{D}^{2*}_{n,\rho}$ ノ potentiel conducteur ヲ $V_{n,\rho}$ トスレバ

$$V_{n,\rho} \geqq V_{m,m'}$$

次ニ p ヲ中心トシタ半径 r 内ノ $\mathfrak{D}$ ノ点ニ對シテハ（但シ $r < \lambda^{km+1}$）

$$V_{m,m'} \geqq \sum_{i=m}^{m'} \frac{r^*_{ki}}{r+\lambda^{ki}} \quad {}^{(2)}$$

従ッテ

$$V_{n,\rho} > \lambda(1-\lambda^{k-1}) \frac{\displaystyle\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{r+\lambda^{ki}}}{1+\displaystyle\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}$$

トナル。

$$\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{\lambda^{ki}} = D(m',m) \quad \text{トスレバ}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\displaystyle\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{r+\lambda^{ki}}}{1+\displaystyle\sum_m^{m'} \frac{r^*_{ki}}{\lambda^{ki}}} = \frac{D(m',m)}{1+D(m',m)} .$$

$\lim_{m'\to\infty} D(m',m) = \infty$ ナル故，m' ヲ充分大キクトッテオキ（例ヘバ $\dfrac{D(m',m)}{1+D(m',m)} > 1-\varepsilon$ ナル如ク），次ニ r ヲ充分小サクトレバ

---

(3) $\mathfrak{D}^2_{n,\rho} = \mathfrak{D}^2_n \cdot C_\rho$

カクテ

$$\frac{\sum_{m}^{m'} \frac{r_{\kappa i}^{*}}{r+\lambda^{\kappa i}}}{1+\sum_{m}^{m'} \frac{r_{\kappa i}^{*}}{\lambda^{\kappa i}}} > 1-\varepsilon$$

ナラシメ得ル。

依ッテ　$\nabla_{n,\rho} > (1-\varepsilon)^3$

$\therefore\quad \nabla_\rho \geqq (1-\varepsilon)^3$　（但シ $|z-p|<r(\varepsilon)$ ナルzニ対シテ）。

ε ハ任意デアッタカラ，結局

$$\lim_{z\to p} \nabla_\rho(z) = 1$$

故ニ，系（前号，p. 391）ニヨリ，p ハ stable ナ境界点デアル。

次ニ必要ナルコトヲ証明スル代リニ，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n}$ ガ收斂スレバ p ハ stable デナイコトヲ証明シヤウ。

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n}$ ガ收斂スレバ，任意ノ λ（$0<\lambda<1$）ニ対シテ，m ヲ充分大キクトレバ $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n} < \frac{\lambda}{4}$ ナラシメ得ル。サテ若シ p ガ stable ナラバ系ニオイテ $\rho=\lambda^m$ ト考ヘテ得ラレル極限函数ヲ $\nabla_m(z)$ トスレバ

$$\lim_{z\to p} \nabla_m(z) = 1.$$

故ニ p ヲ中心トシテ一ツノ球 $C_{\rho(m)}$ ヲ画キ $\mathfrak{D}$ ニ属スルコノ球面 $S(C_{\rho(m)})$ 上デ $\nabla_m(z) > \frac{3}{4}$ ナラシメ得ル。又一方 $m'>m$ ナル m' ヲ適当ニ大キクトリ，$S(C_{\rho(m)})$ 上

デハ$\nabla_{m'+1}^{(2)} < \frac{1}{4}$ナラシメ得ル（コレハ$m'$ヲ充分大キクトレバヨイ —— $\nabla_{m'+1}^{(2)}$ハ系ニオイテ$\rho=\lambda^{m'+1}$トシテ得ラレル極限函数）。

サテ$\overline{e_i}(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ノpotentiel conducteurヲ$v_{n,i}$トシ

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n=m}^{m'} v_{n,i} = \nabla_{m,m'} \text{ トスレバ}$$

$$\nabla_m \leqq \nabla_{m'} + \nabla_{m,m'}.$$

コレハ次ノ如クニシテ証明サレル。

$\nabla_m = \lim_{i\to\infty}\nabla_{m,i}$；$\nabla_{m,i}$ハ$\overline{\mathcal{D}^{2*}_{i,\lambda^m}}$ノpotentiel conducteur；$\mathcal{D}^2_n$ニ充分ノrégularité（各境界点デ定理1ノ條件ヲ満足スル如キ）ヲ與ヘテオイタモノトシ，$\{\nabla_{m'+1,i,j}\}$，$\{v_{n,i,j}\}$ $(n=m,\cdots\cdots,m')$ヲトモニ$\mathcal{D}^{2*}_{i,\lambda^{m'+1}}$，$\{e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\}$内ニ夫々トッタrégulier領域ノpotentiel conducteurニシテ，$\lim_{j\to\infty}\nabla_{m'+1,i,j} = \nabla_{m'+1,i}$，$\lim_{i\to\infty}\nabla_{m'+1,i} = \nabla_{m'+1}$；$\sum_{n=m}^{m'}\lim_{j\to\infty} v_{n,i,j} = \nabla_{m,m',i}$，$\lim_{i\to\infty}\nabla_{m,m',i} = \nabla_{m,m'}$ナル如ク取ルコトガ出来ル。

$$\text{シカラバ}\quad \nabla_{m,i} \leqq \lim_{j\to\infty}\nabla_{m',i,j} + \sum_{n=m}^{m'}\lim_{j\to\infty} v_{n,i,j},$$

従ッテ

$$\nabla_m \leqq \nabla_{m'} + \nabla_{m,m'}.$$

故ニ $S(C_{\rho(m)})$ 上デハ

$$\frac{3}{4} \leqq \frac{1}{4} + V_{m,m'}$$

$$\therefore \quad V_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}.$$

サテ $\rho(m) \neq \lambda^i \ (i = 1, 2, \text{-----})$ ナル如ク最初ニ撰ンデオケバ，$e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ノ境界上デハ 1，$V_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}$ ナル $S(C_{\rho(m)})$ 上デハ $\frac{1}{2}$，$S(C_{\rho(m)})$ 上ノ他ノ点デハ 0 ナル値ヲトル $C_{\rho(m)}$ 内デノ調和函数ヲ Φ_i トスレバ p ノ極ク小サイ近傍デハ

$$V_{m,m'} \geqq \lim_{i \to \infty} \Phi_i \geqq \frac{1}{2},$$

従ツテ $V_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}$ トナル（ヨツテ勿論 $V_{m,m'}(p) \geqq \frac{1}{2}$）.

何故ナラバ，Φ_i ガ境界上デ 0 ナル点集合ノ測度ハ $i \to \infty$ トトモニ $\to 0$ トナリ，定理 3 ノ証明ノトキト同様ニシテ $\Phi_i \geqq \frac{1}{2}$ ヲ導クコトガ出来ルカラデアル。

シカルニ $V_{m,m'}$ ノ p ニ於ケル値ハ

$$V_{m,m'}(p) = \lim_{i \to \infty} \sum_{m}^{m'} v_{n,i}(p) \leqq \sum_{n=m}^{m'} \frac{r_n}{\lambda^{n+1}} {}^{(2)}$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda} \sum_{m}^{m'} \frac{r_n}{\lambda^n}$$

$$< \frac{1}{4}$$

トナツテ矛盾トナル。故ニ p ハ stable デナイ。

即チ p ガ stable ナラバ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n} = \infty$ デアル。 C.Q.F.D.

Keldych, Laurentieff ノ point de stabilité ノ定義バイカナルFニ対シテモ，$\lim_{z\to p} H^{(1)}(z, F, \vartheta) = \lim_{z\to p} H^{(2)}(z, F, \vartheta)$ナルトキ p ヲ point de stabilité ト呼ブ″ト云フノデアルガ，以上デ談話(I)ニ於ケル stable ノ定義モ本質的ニハ何等ノ変リノナイコトが分ッタ。勿論 stable ト云フ言葉ノ意味ヲ理解スルニハ K.L ノ定義ノ方が良イダラウ。以上デ大体ノ話ヲ一先ヅ打切ラウ。

最後ニ〝régulier デアッテ stable デナイ境界点ノ存在″或ハ〝stable デナイ Jordan 領域ノ存在″ノ証明が未発表デアルコトヲ附加シテオカウ。

〔前号ノ訂正〕

tribial ナ誤リヲ除イテハ，p.385ニ於ケル計算中 $+4\pi U_n(0)$ トアルノハ皆 $-4\pi U_n(0)$ ノ誤リデアル。