721. 一次変換群ガ有限群ナルタメノ條件

淺野　啓三（阪大）

複素数ヲ係数トスル一次変換群ガ有限群ニナルタメノ條件トシテ次ノ興味アル定理ガ成立スル。

定理. Grad r ノ Matrix[1] ヲ Element トスル群 $\mathfrak{G}$ ガアリ, $\mathfrak{G}$ ニ属スル各 Matrix ノ Elementarteiler[2] ガ linear デアリ, (即チ各 Matrix ガ Diagonalform ニ transform サレ), $\mathfrak{G}$ ノ Spur ノ値ノ中デ相異ルモノガ有限個ヨリ存在シナイナラバ, $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

コレハ正田教授ガ大島, 高橋両君ヘノ書簡ノ中デ一ツノ Vermutung トシテ述ベラレタモノデアル。

以下ニ於テ私ハ其ノ証明ヲ試ミタイト思フ。証明ノ大体ノ方針ハ先ヅ上記定理ヲ Zyklische Gr. ノ場合ニ証明シ, ツイデコレヲ次ノ Burnside ノ定理ニ帰着セシメントスルノデアッテ, コノコトハ正田教授ノ既ニ注意サレテヰル所デアル。

Burnside ノ定理[3] Matrix ヲ Element トス

(1) 以下 Matrix ノ組成分子ハ総テ複素数トシ, 又ソノ行列式ハ 0 ニナラナイモノトスル。

(2) Matrix A ノ charakteristische Matrix $xE-A$ ノ Elementarteiler ノコトヲ單ニ A ノ Elementarteiler ト云フコトニスル。

(3) Burnside, Proc. London Math. Soc. (2) 3, 1905.

シ群 $\mathfrak{G}$ ノ各 Element ノ Ordnung ガ有限デ，凡テ一定ノ数ヲ超エナイナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

先ヅ補助定理カラ始メル。

補助定理 1. $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r$ ヲ r 個ノ実数トシ、少クトモ一ツハ無理数デアルトスル。然ルトキハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ常ニ $|\alpha_k x_0 - x_k| < \varepsilon$, $x_0 \neq 0$, $k = 1, \cdots\cdots, r$ ニ適スル整数 $(x_0, x_1, \cdots\cdots, x_r)$ ガ存在スル。

補助定理 2. $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r$ ヲ r 個ノ有理数トシ，ソレヲ既約分数ノ形デ表ハストキ、少クトモ一ツノ分母ハ正数 $M > 1$ ヨリ大デアルトスル。然ルトキハ

$$|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{2(A+1)}{[\sqrt[r]{M}]} \text{ (4)}, \quad 0 < |x_0| \leqq M, \quad A = \mathrm{Max.}(|\alpha_1|, \cdots\cdots, |\alpha_r|), \quad k = 1, \cdots\cdots, r,$$

ニ適合スル整数 $(x_0, x_1, \cdots\cdots, x_r)$ ガ存在スル。[5]

(証明) ε 又ハ $\dfrac{2(A+1)}{[\sqrt[r]{M}]}$ ガ $\geqq 1$ ノ場合ハ trivial デアル。ヨッテコレラノ値ハ 1 ヨリ小トスル。今 $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r$ ヲ r 個ノ実数トスル。

$y_k = \alpha_k x_0 - x_k$ トオキ，$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_r$ ノ各ヲシテ $0, 1, \cdots\cdots, N^r$ ノ値ヲ勝手ニ取ラセルト $(y) = (y_1, \cdots\cdots, y_r)$ ノ値ハ $(N^r+1)^{r+1}$ 組生ズル．即チ r 次元 Euclid

---

(4) $[\sqrt[r]{M}]$ ハ $\sqrt[r]{M}$ ヲ超エザル最大ノ整数ヲ示ス。

(5) 上記補助定理ニ於テ例ヘバ α_1 ヲ無理数又ハ分母ガ M ヨリ大ナル有理数トスレバ明カニ $\alpha_1 x_0 - x_1 \neq 0$.

空間ニ於ケル $(N^r+1)^{r+1}$ 個ノ点ガ得ラレル。今 $|y_k|\leqq N^r(A+1)$ ニヨッテ定義サレルr次元ノ立方体Wヲ $N^{r(r+1)}$ 等分スレバ $(N^r+1)^{r+1}$ 個ノ点ハ凡テW内ニ落チ，且ツ点ノ数ガ等分サレタ小立方体ノ数ヨリ多イカラ，或ル一ツノ小立方体内ニハ少クトモ二個ノ点ガ落チル。コレヲ (y'), (y'') トシ，コレニ対スル (x) ヲ夫々 (x'), (x'') トシ $x'_k-x''_k=x_k$ トスレバ $(x)\neq(0)$ 且ツ $y_k=\alpha_k x_0-x_k=y'_k-y''_k$ ナル故

$$|y_k|<\frac{2N^r(A+1)}{N^{r+1}}=\frac{2(A+1)}{N},\quad k=1,\cdots\cdots,r$$

N ヲ充分大ニシテ補助定理1ヲ得，$N=[\sqrt[r]{M}]$ トシテ補助定理2ヲ得ル。コゝデ $x_0\neq 0$ トナルコトハ次ノヤウニシテ知ラレル。若シモ $x_0=0$ トスレバ少クトモ一ツノ $x_k\neq 0$ デアルカラ

$$1\leqq|\alpha_k x_0-x_k|=|x_k|<1$$

トナッテ矛盾ヲ生ズル。

補助定理3. $z_1,\cdots\cdots,z_r$ ヲ絶対値1ノr個ノ複素数トスル。$Z_n=z_1^n+\cdots\cdots+z_r^n$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ トスルトキ，$z_1,\cdots\cdots,z_r$ ノ中少クトモ一ツガ1ノ冪根デナケレバ $Z_0=r$ ハ集合 $\{Z_n\}$ ノ集積点デアル。(従ッテ $\{Z_n\}$ ハ無限集合)

(証明) $z_k=e^{2\pi\alpha_k i}$ トオケバ $z_k^n=e^{2\pi n\alpha_k i}$. $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_r$ ハ絶対値1ヨリ小ノ実数デ，少クトモ一ツハ無理数デアル、補助定理1ニヨリ $\delta>0$ ニ対シ

$|\alpha_k n_0 - n_k| < \frac{\delta}{2\pi} \ (n_0 \neq 0)$ トナル 整数 $n_0, n_1, \cdots\cdots, n_r$ ガ存在スルカラ

$$\left|z_k^{n_0} - 1\right| = \left|e^{2\pi(\alpha_k n_0 - n_k)i} - 1\right| < \delta\left(\sum_1^\infty \frac{\delta^{n-1}}{n!}\right)$$

δ ヲ充分小サクトレバ, $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘタトキ

$$\left|Z_{n_0} - Z_0\right| \leqq \sum_k \left|z_k^{n_0} - 1\right| < r\delta\left(\sum_1^\infty \frac{\delta^{n-1}}{n!}\right) < \varepsilon$$

且ツ $z_1^{n_0}, \cdots\cdots, z_r^{n_0}$ ノ少クトモ一ツハ1ニ等シクナイカラ $Z_{n_0} \neq Z_0$

補助定理4. $z_1, \cdots\cdots, z_r$ ヲ r 個ノ0ナラザル複素数トシ $Z_n = z_1^n + \cdots\cdots + z_r^n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$ トスル. 集合 $\{Z_n\}$ ガ有界ナラバ $|z_k| = 1 \ (k = 1, \cdots\cdots, r)$

(証明) $z_k = |z_k| z_k'$, $|z_k'| = 1$、補助定理3ニヨリ $n_1 < n_2 < \cdots\cdots \to \infty$, $z_k'^{n_\nu} \to 1 \ (k = 1, \cdots\cdots, r)$ トナル正ノ整数ノ Folge $\{n_\nu\}$ ガ取レル. ヨッテ $|z_k|$ ノ中1ヨリ大ニナルモノガアレバ明カニ $\lim_{\nu \to \infty} Z_{n_\nu} = \infty$. $|z_k|$ ノ中1ヨリ小ニナルモノガアルトキハ負ノ Exponent ヲ考ヘレバヨイ。

補助定理5. Ordnung ガ有限ナ grad r ノ Matrix ヲ Element トスル群 $\mathfrak{G}$ ガ無限群ナラバ Einheitsmatrix E ノ Spur $Sp(E) = r$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Spur ノ値ノ集合 $Sp(\mathfrak{G})$ ノ集積点ヲナス. (従ッテ $Sp(\mathfrak{G})$ ハ無限集合).

(証明) Burnside ノ定理ニヨリ $\mathfrak{G}$ ノ元ノ Ord-

nung ハ有界デハナイカラ $M>0$ ヲ任意ニ大ナル正数トスルトキ *Ordnung* ガ M^r ヨリ大ナル *Matrix* A ガ存在スル. A ノ *Normalform* ヲ $\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_r \end{pmatrix}$ トスレバ $\omega_1, \cdots\cdots, \omega_r$ ハ 1 ノ冪根デ, ソノ *Ordnung* ヲ夫々 $m_1, \cdots\cdots, m_r$ トスレバ, $\omega_k^{m_k}=1$, A ノ *Ordnung* m ハ $m_1, \cdots\cdots, m_r$ ノ最小公倍数デアル. ヨッテ $m_1 \cdots\cdots m_r \geqq m > M^r$. 故ニ $\underset{1\leqq k\leqq r}{\mathrm{Max}}(m_k) > M$. $\omega_k = e^{2\pi \alpha_k i}$, $|\alpha_k|<1$, $k=1, \cdots\cdots, r$ トオケバ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r$ ハ有理数デ, ソノ中少クトモ一ツ例ヘバ α_1 ハ (既約分数デ表ハシタ場合ノ) 分母ガ M ヨリ大デアル. ヨッテ補助定理 3 ニヨリ

$$\left|\alpha_k n_0 - n_k\right| < \frac{4}{[\sqrt[r]{M}]}, \quad 0<|n_0| \leqq M, \quad k=1, \cdots\cdots, r$$

ニ適スル整数 $n_0, n_1, \cdots\cdots, n_r$ ガ存在スル. 前ト同様ニ

$$\begin{aligned} |S_p(A^{n_0}) - S_p(E)| &= |\omega_1^{n_0} + \cdots\cdots + \omega_r^{n_0} - r| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{r} \left| \omega_k^{n_0} - 1 \right| < r\delta\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\delta^{n-1}}{n!} \right), \quad \delta = \frac{8\pi}{[\sqrt[r]{M}]} \end{aligned}$$

M ヲ充分大ニトレバ, 任意ニ小ナル $\varepsilon>0$ ニ對シテ $|S_p(A^{n_0}) - S_p(E)| < \varepsilon$. 又 $0<|\alpha_1 n_0 - n_1|<1$ デアルカラ $\omega_1^{n_0} = e^{2\pi(n_0\alpha_1 - n_1)i} \neq 1$. 故ニ $S_p(A^{n_0}) \neq S_p(E)$. 即チ $S_p(E)$ ハ $S_p(\mathfrak{G})$ ノ集積点デアル。

以上ノ補助定理ヲ用ヒテ我々ノ定理ハ今少シ一般ナル次ノ形デ容易ニ証明サレル。

定理: <u>$\mathfrak{G}$ ヲ *Grad* r ノ *Matrix* ヲ *Element* ト</u>

スル群トシ，コレニ関シテ次ノ條件ガ成立スルモノトスル。

1. $\mathfrak{G}$ ニ屬スル各 Matrix ノ Elementarteiler ハ linear デアル。
2. $\mathfrak{G}$ ノ Spur ノ値ノ集合 $Sp(\mathfrak{G})$ ハ beschränkt デアル。
3. $Sp(E)=r$ ハ $Sp(\mathfrak{G})$ ノ孤立点デアル。

然ルトキ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

（証明）$\mathfrak{G}$ ガ unendliche Ordnung ノ元 A ヲ有スレバ，ソノ Eigenwert ヲ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_r$ トスルトキ $Sp(A^x)=\varepsilon_1^x+\cdots\cdots+\varepsilon_r^x$ デアルカラ補助定理 4 ニヨリ $|\varepsilon_k|=1$ $(k=1,\cdots\cdots,r)$ デアリ，又 $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_r$ ノ中少クトモ一ツハ 1 ノ羃根デハアリ得ナイカラ補助定理 3 ニヨリ $Sp(A^x)$ ハ $Sp(E)=r$ ニ集積スル．ヨッテ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_r$ ハ凡テ 1 ノ羃根デナケレバナラナイ。即チ各 Matrix ノ Ordnung ハ有限デアル。

次ニ $\mathfrak{G}$ ガ有限群デナケレバ補助定理 5 ニヨリ $Sp(E)$ ガ $Sp(\mathfrak{G})$ ノ集積点ニナッテ假定ニ反スル．故ニ $\mathfrak{G}$ ハ有限群

此ノ定理ノ特別ノ場合トシテ

定理（E. Cartan）[6] unitäre Matrix ヲ Element

(6) E. Cartan, Comptes Rendus, 198 (1934), p. 1742. Cartan ハコノ定理ヲ continuous gr. ノ理論ヲ應用シテ簡單ニ証明シタ．尚次ノ定理モコノ方法ニヨッテ証明サレル。

トスル群 $\mathfrak{G}$ ニ於テ $S_p(E)$ ガ $S_p(\mathfrak{G})$ ノ孤立点ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

(証明) unitäre Matrix ノ Elementarteiler ハ linear デアリ、ソノ Eigenwert ノ絶対値ハ 1 ニ等シイ、故ニ Spur ノ絶対値ハ Matrix ノ grad ヲ超エナイ。

定理. Matrix ヲ Element トスル群 $\mathfrak{G}$ ガ kompakt デ且 $S_p(E)$ ガ $S_p(\mathfrak{G})$ ノ孤立点デアレバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

定理. Matrix ヲ Element トスル群 $\mathfrak{G}$ ガ beschränkt デ且 $S_p(E)$ ガ $S_p(\mathfrak{G})$ ノ孤立点デアレバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

(証明)
$$\left.\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \lambda & \\ 0 & \ddots\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\right\}\rho = \lambda E + F, \quad F^{\rho-1} \neq 0, \quad F^{\rho} = 0.$$

$$(\lambda E + F)^n = \lambda^n E + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}F + \binom{n}{2}\lambda^{n-2}F^2 + \cdots\cdots$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

ヨリ $\mathfrak{G}$ ガ kompakt 又ハ beschränkt ナルタメニハ各 Matrix ノ Elementarteiler ガ linear デ且ツ Eigenwert ノ絶対値ガ 1 ナラナケレバナラナイコトガ容易ニワカル。

定理 (A. Weil).[17] Matrix ヲ Element トスル

(17) A. Weil, Comptes Rendus, 199 (1934), p. 180.

群ヲ一ツノ abstract gr. ノ表現(Darstellung)ト考ヘコレヲ $\mathbb{D}$ トスル。$\mathbb{D}$ ガ有限群ヲナスタメ必要且ツ充分ナ條件ハ適當ナ整係數ノ Polynom $f(x)$ ニツイテ $f(\mathbb{D})\sim 0$ ナル關係ガ成立スルコトデアル。

($f(\mathbb{D})\sim 0$ ノ意味ハ次ノ通リ. 先ヅ $\mathbb{D}^n$ ハ $\overbrace{\mathbb{D}\times\mathbb{D}\times\cdots\times\mathbb{D}}^{n-mal}$ ナル Kronecker ノ Produkt トスル。二ツ以上ノ表現ノ和ハコレラノ表現ヲ diagonal ニナラベテ作ツタ表現トスル。然ラベ正ノ整數ヲ係數トスル Polynom $f(x)$ ニ對シテ $f(\mathbb{D})$ ナル表現ガ定義サレル。

次ニ $f(x)$ ヲ任意ノ整係數ノ polynom トシ Pos. term ヲ集メテ出來タ Polynom ヲ $f_1(x)$, negative term ヲ集メテ出來タ Polynom ヲ $-f_2(x)$ トスル; $f=f_1-f_2$. $f_1(\mathbb{D})$ ト $f_2(\mathbb{D})$ ガ同値表現ヲ作ル場合 ($f_1(\mathbb{D})\sim f_2(\mathbb{D})$) $f(\mathbb{D})\sim 0$ ト書ク.)

(証明) 定理ノ條件ガ必要ナコトハ有限群ニ關スル表現論カラ容易ニ結論サレル, 次ニ充分ナコトノ証明. $\mathbb{D}$ ニゾクスル Matrix A ノ Spur ハ明カニ $f(S_p(A))=0$ ナル關係ヲ滿足スルカラ $S_p(A)$ ノ中相異ルモノハ有限個ヨリ存在シナイ。アトハ A ノ Elementarteiler ガ linear ニナルコトガ云ヘレバヨイ。

$xE-A$ ノ Elementarteiler ヲ $(x-\lambda_k)^{\rho_k}$ ($k=1,\ldots\ldots,m$) トシ Exponent ρ_k ノ Max. ヲ ρ トシ, 今 $\rho>1$ トスル. $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ トオキ $f_1(\mathbb{D})\sim f_2(\mathbb{D})$ ナルモノトスル. 又 $f_1(x)$, $f_2(x)$ ノ grad ヲ夫

ハ n_1, n_2 $(n_1 > n_2)$ トスル。

然ラバ $f_1(\mathbb{D}), f_2(\mathbb{D})$ ニ於テ Matrix A ニ對應スル Matrix ノ Elementarteiler ノ Exponent ノ Max. ハ夫々 $n_1(\rho-1)+1$, $n_2(\rho-1)+1$ トナルコトハ次ノ lemma カラ容易ニ得ラレル。然ラバ $n_1(\rho-1)+1 \neq n_2(\rho-1)+1$ トナッテ矛盾ヲ生ズル。

lemma. Matrix A, B ノ Minimal Polynom ガ夫々 $(x-\lambda)^\rho$, $(x-\mu)^\sigma$ $(\lambda, \mu \neq 0)$ デアルトスレバ Kronecker ノ積 $A \times B$ ノ Minimalpolynom ハ $(x-\lambda\mu)^{\rho+\sigma-1}$ デアル。

(証明) $A = \lambda E + F$; $B = \mu E_1 + F_1$ $(E, E_1$ ハ單位行列$)$ トオケバ F, F_1 ハ nilpotent デ夫々 ρ 又ハ σ 乗シテ始メテ 0 ニナル。

$$A \times B = \lambda\mu E \times E_1 + \mu F \times E_1 + \lambda E \times F_1 + F \times F_1$$

($E \times E_1$ ハ單位行列)

$$(A \times B - \lambda\mu E \times E_1)^{\rho+\sigma-1} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=\rho+\sigma-1} \frac{(\rho+\sigma-1)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \mu^\alpha \lambda^\beta F^{\alpha+\gamma} \times F_1^{\beta+\gamma} = 0$$

$$(A \times B - \lambda\mu E \times E_1)^{\rho+\sigma-2} = F^{\rho-1} \times F_1^{\sigma-1} \neq 0$$

〔補遺〕 原稿作成後氣付イタコトデスが補助定理1,2ヲ導クノニ用ヒタ証明法ニハマヅイ所がアッテ，ソレダケ結果モ良クナイワケデ，此ノ系次ノ様ニヤッタ方がヨカッタ次第デス。

$\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_r$ ヲ r 個ノ実数トシ，$M > 1$ ヲ任意ノ正數トスルトキ $|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{1}{[\sqrt[r]{M}]}$，$0 < x_0 \leqq M$，$k = 1, \cdots, r.$

ニ適スル整数 ($x_0, x_1, \ldots\ldots, x_r$) ガ存在スル。

(証明) $x_0 = 0, 1, \ldots\ldots, N^r$ ($N = [\sqrt[r]{M}]$) ナル N^r+1 個ノ値ヲ與ヘ $x_k = [\alpha_k x_0]$ トスレバ $0 \leqq \alpha_k x_0 - x_k < 1$, $y_k = \alpha_k x_0 - x_k$ トスレバ (N^r+1) 個ノ点 $(y) = (y_1, \ldots\ldots, y_r)$ ハ原点ヲ頂点トスル單位立方体 W ノ中ニ落チル W ヲ辺ノ長サ $\frac{1}{N}$ ノ小立方体ニ N^r 等分スレバ (境界点ハ $a \leqq y_k < b$ ナル如クトル) 少クトモ一ツニハ二個ノ点ガ落チル。ソレヲ (y'), (y''), ソレニ対スル (x) ヲ (x'), (x'') トシ $x_k = x'_k - x''_k$ トスレバ $(x) \neq 0$. 且 $\alpha_k x_0 - x_k = y'_k - y''_k$ デアルカラ $|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{1}{N}$. コヽデ x_0 ハ 0 ニナラナイ。従ッテ正トシテモヨイ。

実際ハ $|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{1}{[\sqrt[r]{M}]}$ ハ $|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{1}{\sqrt[r]{M}}$ デオキカヘラレルノデアリ, ソレハ *Minkowski* ノ定理ノ特殊ノ場合トシテ得ラレル事項デアッタ。