~~682~~. 彷徨函数 (*random functions*)

北川　敏男（阪大）

§1. 緒言: Brown運動[1]ニ刺戟サレテ産ミ出サレタ彷徨函数[2]ノ理論ニツイテハ, Paley-Wiener[3]ノ書ニ優レタ解説ガアル。タダ遺憾ナコトニハ。ソコデ展開スル理論ニハ, 彼等ノ云フ如ク,[4]

---

(1) Perrin: Les Atomes. 又ハ植村, 玉虫, 三島共譯: 原子: 第三章及ビ第四章. コレヲ〔原〕デ引用スル。又, 物理學文献抄, II, 土井不曇: Brown運動ニ委シイ。

(2) 福島浩: 物理學ニ於ケル統計的現象（岩波科學文献抄）ニ於イテ Schwankung (fluctuation) ノ譯ニ, 彷徨偏倚ヲ用ヒラレテタ。ソレニナラヒ, 假リニ彷徨ヲ用ヒルコトニシタ。同書, 序言, 跋ヲ参照セラレヨ。

(3) Fourier Transforms in the complex domain: Am. Math. Coll. Pub. Vol. XIX. 特ニ Chap. IX 及ビ X. コレヲ〔F〕デ引用ス。

(4) 〔F〕, p.141.

"the disadvantage of being most non-heuristic and of demanding from the reader the patience to take on faith the necessity of a large amount of material whose justification is only given after the completion of the argument" ガナイ譯デモナイ。モット heuristic ナ方法ガアッテ然ルベキデアル。

Brown 運動ノ錯雑ナル，個々ノ微粒子ニツイテ，軌道ノ追跡ヲ出来ル限リ精細ニシヤウトシテモソレハ無意味デアッテ，[5] 統計力學ノ對象トシテ，始メテ意味ヲモツ。經驗的ニハ，実驗サレタ數多クノ軌道ニツイテノ、或ル物理的量ノ平均値ガ問題デアル。茲ニ物理學者ノイフ數多クト云フノハ，數學的ニ云フ凡ベテニ相應スル。一粒子ノ軌道方程

---

(5) [原], p.115—176 ニ云フ"粒子軌道ノ錯雑ハ実ニ多様デ，又其ノ変化ハ迅速デアルカラ、到底之レヲ跡ツケルコトハ不可能デアリ、又実際測ラレタル軌道ハ事実ヨリモ遥カニ簡単且ツ小デアル。又一粒子ノ見掛ケノ平均速度モ與ヘラレタ時間内ニ於イテハ，ソノ大イサ方向共ニ激シク変リ，観察時間ヲ如何ニ短縮シテモ決シテ一定ノ極限ニ向フモノデハナイ。……我々ハタトヘ近似的ニセヨ軌道ノドノ点ニ対シテモ切線ヲ定メルコトモ出来ナイ、而シテコレコソ我々ガ微分係数ヲモタナイ連続函数ヲ考フベキ眞ニ自然ナル場合デアル。"

式ハ $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ (tハ時間) トシテ與ヘラレルデアラウ。可能ナルスベテノ軌道函数 x ニツイテ，x ノ汎函数ノ平均値ガ問題ニナル。(6) コレハ、可能ナルスベテノ軌道函数ノツクル空間ニ於イテ、測度ノ概念ヲ導入スルコトト同問題デアラウ。但シ，通常ノ解析ノ對象トナルタメニハ，ソノ測度ハ，完全加法的デアルコトガ望マシイ。

斯クシテ，彷徨函数ノ理論ガ，要スル一ツノ積分論デアルベキコトヲ知ルノデアルガ、(7) ソウシタ理論ガ何等カノ方法デ建設サレタ場合，実験的ニ確立サレタ統計的法則(8)ガソノ理論カラ導カレナケレバ無意味デアルコトハ敢テ断ルマデモナイ。

前述ノ Paley-Wiener ノ所謂 "disadvantage" ノ除カレルコトヲ第一ニ希望スル立場ニアツテハ，Wiener ノコノ方面ノ最初ノ論文(9)ニ戻ルニ如クハナイ。E. Hopf ガ

---

(6) $y(t)$ ニ関シテモ同様。以下 $x(t)$ ニ関シテノミ述ベル。粒子ニハ重量ガアルタメ鉛直ノ方向ハ別デアル。[展], P.177.

(7) It will be seen that the theory of random functions is in essentials a theory of integration in function space. ([P], p.140)

(8) Perrin ノ実験等. コレハ後デ述ベル。

(9) Differential space, Journ. Math. and Phy. Vol. II, NO.3. (1923)

ソノ著[10]ニ於テ、ソノ方法ノ梗概ヲ、ヨリ modern ナ形デ述ベテ居ル。私ハ此處ニ、其處デ省略サレタ證明ヲ補ヒ乍ラ、紹介ヲ試ミヨウト思フ。

§2. 構成的方法[11]ノ概要. $-\infty<t<\infty$ デ定義サレタ實數値連續函數[12] $x(t)$ ニ對シテ, $x(0)=0$ ナルトキ, 區間 $(s,t)=A$ ニ對シテ $\mathfrak{X}(A)=x(t)-x(s)$ ト定義スル。コノ場合, 點函數 x ト區間函數 $\mathfrak{X}$ トノ對應ガ一對一トナル。今考ヘタヤウナ區間全部ノ集合ハ, 集合体[13] (Mengenkörper) ヲツクリ、$\mathfrak{X}$ ハソコデ加法的 (finite additive) デアル。吾々ハ, E. Hopf ニ從ヒアラユル $\mathfrak{X}$ ノツクル函數空間ニ, Lebesgue 測度ヲ入レルコトヲ問題ニスルノデアル。

---

(10) Ergodentheorie, Ergeb. Math. und ihr. Grenzgebiete (1937). 特ニ, §16. Masstheorie im Raum der additiven Mengenfunktionen. コレヲ〔E〕デ引用ス。

(11) 假リニコノ樣ナ名ヲツケタ。〔F〕ノ方法ニ對比シテ。

(12) 〔E〕ニハ, 連續トイフ假定ガ書イテナイ。以下ノ議論デハコノ性質ヲ用ヒナケレバナラナイコトハ明ラカデアル。(或ハ, 必然的ニ導カレルコトデアルカモ知レナイ)。〔F〕, Theorem XLIII, p. 148 參照。又〔F〕, p. 151 ニ "In all that follows, we take $\psi(x,\alpha)$ to be continuous" トアル。

(13) 或ル集合系ガアッテ、ソレノ任意ノ二ツノ元 α,β ト共ニ, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha-\beta$ ($\alpha\supset\beta$ ノトキ), $\beta-\alpha$ ($\beta\supset\alpha$ ノトキ) ヲ含ムトキ, Mengenkörper ト云フ。コレヲ集合体ト譯シテミタ。

吾々ハ，次ノヤウナ構成的方法ヲ採ラウ。

〔I〕 ⓝノツクル或ル集合体 $\mathfrak{K}$ ヲ適當ニ選ビ此處ニ，*finite additive* ナ測度 m ヲ，先ヅ定義スル。

〔II〕 $\mathfrak{K}$ ヲ *Borel* 集合体 $B\mathfrak{K}$（完全加法的集合体[14]）ニマデ拡張シテ，$B\mathfrak{K}$ ニテ完全加法的（*completely additive*）デ，$\mathfrak{K}$ デハ m ト一致スルヤウナ測度 m^* ヲ求メル。

§3. 加法的測度ノ導入。 $\mathfrak{R}$ ハ点 $p, p', \text{------}$ カラナル空間，K ハ $\mathfrak{R}$ ノ部分集合ニヨッテ形成サレタ或ル集合体トスル。$\mathfrak{R}$ ガ実数全部ノ集合，K ガ §2 ニ述ベタ区間ノツクル集合体デアルノガ，吾々ノ要求スル場合デアルガ，茲デハ、コノヤウナ制限ヲ設ケズ、一般的ナ結果ヲ述ベヨウ。今 K ニ属スル凡ベテノ集合ニ對シテ定義サレタ加法的ナ集合函数 ⓝ(A) ヲ考察ノ對象トスル。カヽル ⓝ 全部ノツクル空間ヲ Ω トスル。

$\mathfrak{R}$ カラ、相素ナル $A_1, A_2, \text{-------}, A_n$ ヲ選ビ，$x_i =$ ⓝ(A_i) $(i = 1, 2, \text{-------}, n)$ ナル實数ノ組ヲ考ヘル。n 次元ゆーくりっど空間 R_n ニ属スル O_n ナル可測集合ヲ與フルトキ，$\{x_1, x_2, \text{------}, x_n\} \subset O_n$ デアル様ナ Ω ノ

---

(14) 集合体ガ，可附番無限個ノソレニ属スル集合ノ和集合ヲモ含ムトキ，コレヲ *Borelscher (od. absolut additiver) Mengenkörper* トイフ。

部分集合ヲαデ表ハサウ。

コノ様ナ方法デツクラレタα全部ノ集合ハ，一ツノ集合体ヲツクル。ソレヲ示スノニハ

$$\alpha = \left[\Theta ; \{\Theta(A_1), \Theta(A_2), \cdots\cdots, \Theta(A_n)\} \subset O_x\right] \text{[15]} \cdots\cdots(1)$$

$$\beta = \left[\Theta ; \{\Theta(B_1), \Theta(B_2), \cdots\cdots, \Theta(B_m)\} \subset O_m\right] \cdots\cdots(2)$$

ヲ考ヘル。A_i, B_j ニ共通ノ部分分割ヲ施シテ，相素ナル $C_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,N)$ ヲ得タトスル。[16] コノトキ

$$\alpha = \left[\Theta ; \{\Theta(C_1), \Theta(C_2), \cdots\cdots, \Theta(C_N)\} \subset O_N\right] \cdots\cdots(3)$$

$$\beta = \left[\Theta ; \{\Theta(C_1), \Theta(C_2), \cdots\cdots, \Theta(C_N)\} \subset O'_N\right] \cdots\cdots(4)$$

トモ書カレル。斯ク表ハストキ，$\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ ($\alpha>\beta$ ノトキ) ガ又，夫々ノ集合体ニ属スルコトハ明ラカデアル。[17]

コノ集合体ニ加法的集合体ヲ導入スル：ソノタメ，任意ノ実数 x 及ビ K ニ属スル任意 A ニ對シテ定義サレタ實數値函数 $w(x,A)$ ヲ考ヘ $w \geqq 0$，$\int_{-\infty}^{\infty} w(x,A)\,dx = 1$ （スベ

---

(15) $\in(X)$ ナル性質ヲ有スル X ノ全部ヲ $[X, \in(X)]$ ト書ク。

(16) A_i 同志，B_j 同志ハ夫々，假定ニヨリ共通点ハナイ。シカシ，A_i ト B_j トニハ共通点ガアルカモ知レナイ。共通分割ニヨル $C_\nu\ (\nu=1,2,\cdots\cdots,N)$ ヲツクルトキ，各 A_i ハ若干個ノ C_ν ノ和集合トシテ表ハサレル。但シ C_i ノウチノアルモノハ $\sum A_i$ ニ含マヌコトモアラウ。$\{B_j\}$ ニ関シテモ同様。

(17) $O_N+O'_N$, $O_N O'_N$, $O_N-O'_N$ 又ハ O'_N-O_N ガ又 R_n デ可測ナルガ故ニ。

テ $A \in K$ ニツイテ）トスル。ソシテ (1) デ與ヘラレタ α ニ對シ

$$m(\alpha)=\iint_{O_n}\cdots\int w(x_1, A_1)\, w(x_2, A_2)\cdots w(x_n, A_n)\, dx_1 \cdots dx_n \quad \cdots\cdots (5)$$

デ $m(\alpha)$ ヲ定義スル。

然ルニ同ジ α モ，例ヘバ (1) ト (3) トデ見ル如ク違ッタ定義ノ仕方ガアル。定義ノ仕方ハ違ッテモ，$m(\alpha)$ ソノモノハ一致セネバナラヌ。

コノタメノ必充條件ハ，$AB=0$ ニ對シ常ニ

$$w(x, A+B)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t, A)\, w(x-t, B)\, dt \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

ナル函數方程式ヲ滿足スルコトデアル。[18] 尚、m ガ加法的測度ニナルコトハ，明カデアル。

コレ等ハ，一般的ナ結果デアル。吾々ハ §2 デ揭ゲタ問題 [I] ニ歸ラウ。§1 ノ終リニ述ベタ如ク、吾々ノ理論ハ實驗ノ[19]結果ヲ導カナケレバナラヌ。實驗ノ示ストコロニ從フタメニハ、(5) ニ於テ，$w(x, A)=e^{-\frac{x^2}{M(A)}}\Big/\sqrt{M(A)\pi}$ ト

---

(18) 證明ハ [E] ニ委シク書イテアル。A_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ カラ C_ν $(\nu=1, 2, \cdots\cdots, N)$ トシツルトキ，(1), (3) 各々ニヨリ夫々 $m(\alpha)$ ガ定義サレルガ、ソレガ同ジ値ヲモツコトヲ示セバヨイ。

(19) ハ次頁ヘ。

セネバナラヌ。[20] ($\mathfrak{M}(A)=\mathfrak{M}([s,t])=t-s$ トス) カリ定義サレタ $\mathfrak{M}$ ハ函數方程式(6)ヲ充タスガ故ニ，加法的ナ測度ヲ得タコトニナル。即チ問題Iハ肯定的ニ解決サレタ。
(1)ノ如ク定義サレタ α ヲ基本圖形ト呼ンデ置カウ。

§4. 彷徨函數ニ關スル Hölder ノ條件。

問題〔II〕ニ進ム前ニ，準備ヲセネバナラヌ。

定理1. $\varepsilon>0$, $\eta>0$, $C>0$ ヲ任意ニ與ヘタトスル。然ルトキ，次ノ性質 1°—3° ヲ有スルヤウナ，自然數

---

(19) 例ヘバ，顯微鏡ノ視野ニ於イテ，アル適當ニ選ンダ同時間 τ ヲ隔テテ，同じ粒子ノ位置ヲシルス。例ヘバ x—成分ニツイテ，$x(k\tau)$ ヲ測定ス。コノヤウナ實驗ヲ繰返シテ $\{x_i(k\tau)\}$ ($k=0,1,2,\cdots\cdots,N$, $i=1,2,\cdots\cdots,M$) ヲ得ル。Perrin ノ實驗カラハ，次ノ樣ナ漸近的法則ガ得ラレル。

I*. $\sum_{i=1}^{M}\{x_i(k\tau)\}^2$ ハ，略ミ k ニ正比例スル。

II*. 各 time-interval $(k\tau, l\tau)$ ニ於ケル $\{x_i(l\tau)-x_i(k\tau)\}$ ($i=1,2,\cdots\cdots,M$) ハ，略ミ Gauss ノ分布ニ從フ。ソノ分布ノ基準ハ $l-k$ ニ depend スル。

III*. 互ニ重リ合ハナイ time-intervals ニ於ケル運動ハ，獨立事象ト見做サレル。

(20) カク定義スルトキ，脚註(19)ニ述ベタ法則 II*, III* ヲ充シテヰルコトガワカル。カクスルトキ I* ハ，必然的結果トナルコトハ後デ示ス。

$N(\varepsilon, \eta, C)$, 正数 $C'(\varepsilon, \eta, C)$ 及ビ高々可附番無限個ノ基本図形列 $\{\alpha_i\}$ $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ガ選ビ出セル。即チ

$$1°)\quad \sum_{i=1}^{\infty} m(\alpha_i) < \eta \quad \cdots\cdots(7)$$

2°) $\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ ニ属スル凡テノ x (即チ函数 x) ニ共通ニ, 指数 $\frac{1}{2}-\varepsilon$ デ次ノ Hölder ノ條件ガ充サレテヰル: $|t_2 - t_1| \leqq 1/2^{N(\varepsilon, \eta, C)}$ ナル限リ, $-\infty < t_1$, $t_2 < \infty$ ニテ

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leqq C|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\{1+|t_1|^{2\varepsilon}+|t_2|^{2\varepsilon}\} \cdots\cdots(8)$$

3°) $\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ ニ属スル凡ベテノ x (即チ x) ニ共通ニ, $-\infty < t < \infty$ ニテ

$$|x(t)| \leqq C'\left\{|t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}+1\right\} \cdots\cdots(9)$$

証明: $\frac{1}{2}-\varepsilon = \lambda$ ト書ク。証明ヲ三段ニ分ツ。

第一段. 與ヘラレタ C トハ別ニ, $C_1 > 0$ ヲ便宜上考ヘル。整数 m, n, k ヲ定メテ

$$\left|x\left(m+\frac{k+1}{2^n}\right) - x\left(m+\frac{k}{2^n}\right)\right|$$
$$\geqq C_1 2^{-\lambda n}\left\{1+\left|m+\frac{k+1}{2^n}\right|^{2\varepsilon}+\left|m+\frac{k}{2^n}\right|^{2n}\right\} \cdots\cdots(10)$$

ヲ満足スルヤウナ x 即チ x ノ集合ヲ Ω デ考ヘル。

コレハ基本圖形デアルカラ、ソノ測度[21]ハ、§3ニ於イテ與ヘタ、簡單ナ計算ノ後ワカル如ク

$$\exp\left(-\frac{C_1^2 2^{(1-2\lambda)n}}{2\pi}\left(1+\left|m+\frac{k}{2^n}\right|^{2\varepsilon}+\left|m+\frac{k+1}{2^n}\right|^{2\varepsilon}\right)\right)\cdots\cdots(11)$$

次ニ，m, n, k ノウチ、n ダケ固定シテ，$-\infty<m<\infty$，$0\leqq k<2^n$ ナル整數 m, k ノドレカノ組ニ對シテ(10)ナル關係ノ成立スルヤウナ x ノ集合ヲ考ヘルト，コレハ可附番無限個ノ基本圖形ノ和集合デアッテ、ソノ測度ノ和ハ，(11)ナル項ヲ，$-\infty<m<\infty$，$0\leqq k<2^n$ ノ範囲デ總和シタモノニナル。コノ總和ハ，

$$C_2\frac{2^n}{2^{(1-2\lambda)n\left(\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon-1}+1\right)}}\ \exp\left\{-\frac{C_1^2 2^{(1-2\lambda)n}}{2\pi}\right\}\cdots\cdots(12)$$

ヲ超ヘナイ．但シコゝニ，C_2 ハ ε ト C_1 トニ関係スルガ n ニ無関係ニエラベル常數。從ッテ，アル自然數 N ヲ與ヘルトキ，(10)ナル関係ガ，$n\geqq N$，$-\infty<m<\infty$，$0\leqq k<2^n$ ノ範囲ニアルドレカノ (m, n, k) ノ組ニ對シテ成立スルヤウナ x 全部ノ集合ハ，可附番個ノ基本圖形ノ和集合ニ含

---

(21) 吾々ハ，(5)ニ於テ，$w(x,A)=e^{-\frac{x^2}{M(A)}}/\sqrt{M(A)\pi}$ トシタカラ，コノ測度ハ，コノ際 $M(A)=2^{-n}$ ニ注意シテ，

$$\sqrt{\frac{2^n}{\pi}}\left\{\int_p^\infty e^{-2^n x^2}dx+\int_{-\infty}^{-p}e^{-2^n x^2}dx\right\}$$

デ與ヘラレル。但シ

$$p=C_1 2^{-\lambda n}\left\{1+\left|m+\frac{k+1}{2^n}\right|^{2\varepsilon}+\left|m+\frac{k}{2^n}\right|^{2\varepsilon}\right\}$$

マレ，ソレラ基本圖形ノ測度ノ和ハ，(12) ナル項ヲ $n\geqq N$ ナルスベテノ n ニツイテ總和シタモノニナル。$1-2\lambda>0$ ナルコトカラ、ソレハ收斂スル。從ツテ，$\eta>0$ ヲ勝手ニ與ヘテモ，$N_1(\varepsilon,\eta,C_1)$ ヲ充分大キクトレバ $N_1(\varepsilon,\eta,C_1)$ ヨリ大ナル n ニツイテノ總和ヲ η ヨリ小ナラシメ得ル。

コノコトハ，定理1ノ假定ノモトニ於テ，（但シ C ノ代リニ $C_1>0$（コレモ勝手ニ與ヘテヨイ）ヲ與フルトキ）主張1°ト，ソレカラ或ル制限ノモトデ主張2°トガ成立スルコトヲ意味スル。ソノ制限トイフノハ，(8)式ノ成立ハ，C ノ代リニ C_1 ヲ用ヰ；又 $t_2=m+\frac{k+1}{2^n}$，$t_1=m+\frac{k}{2^n}$，（m ハ任意ノ整數，$n\geqq N_1(\varepsilon,\eta,C_1)$，$0\leqq k<2^n$）ニ對シテノミ証明サレテヰルコトヲ意味スル。ソノ制限ヲ取除クコトガ第二段デアル。

第二段。今スベテノ實數ヲ二進法デ展開スル。

$$t_1=a_{-h}a_{-h+1}\cdots a_0,\ a_1\ a_2\cdots a_n\,a_{n+1}\cdots$$

$$t_2=b_{-k}\,b_{-k+1}\cdots b_0,\ b_1\ b_2\cdots b_n\ b_{n+1}\cdots$$

$0<t_2-t_1\leqq 1/2^n$，$n\geqq N(\varepsilon,\eta,C_1)$ トスル。從ツテ $h=k$ デ，$l\leqq n-1$ ニ對シテハ $a_l=b_l$. 急利

$$t_2^n=a_h\,a_{-h+1}\cdots a_0,\,a_1a_2\cdots a_{n-1}\,a_n\,a_{n+1}\cdots a_m$$

$$t_1^m=a_{-h}\,a_{-h+1}\cdots a_0,\,a_1a_2\cdots a_{n-1}\,b_n\,b_{n+1}\cdots b_m$$

ヲ考ヘル。$x(t)$ ハ連續ダカラ

$$x(t_i)=\sum_{m=n}^{\infty}\left\{x\left(t_i^{m+1}\right)-x\left(t_i^{m}\right)\right\}+x\left(t_i^{n}\right)\quad(i=1,2)$$

t_i^mハミチ、第一段デ考ヘタ分点デアルカラ、第一段ノ結果ト上式トカラ

$$\left|x(t_2)-x(t_1)\right|<\frac{4C_1}{1-2^{-\lambda}}2^{-\lambda n}\left\{1+\left|t_1\right|^{2\varepsilon}+\left|t_2\right|^{2\varepsilon}\right\}$$

コヽニ $t_2-t_1=2^{-n}$. 依ツテ，定理ノノ假定ノ C ヲ勝手ニ與ヘタトキ，$C_1=C(1-2^{-\lambda})/4$ ニトツテ，コノ C_1 ニツキ第一段ヲ証明シテオケバ、結局定理ノノ $1°-2°$ が得ラレタコトニナル。

第三段．$3°$ ヲ証明スル。$t^*=1/2^{N(\varepsilon,\eta,C)}$ トス．$t>t^*$ トスル（$t<-t^*$ ノトキモ同様）區間 $[t^*, t]$ ヲ r 等分シ，$t_r=t$，$t_0=1$ トシテ

$$x(t)-x(t^*)=\sum_{i=1}^{r}\left\{x(t_i)-x(t_{i-1})\right\}$$

ト書ク。細区間ノ長サヲ $1/2^{N(\varepsilon,\eta,C)}$ ヨリ小ニスル。

$\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ ニ属スル凡ベテノ函数 x ニツイテ，第二段デ証明シタ関係式 (8) カラ

$$\left|x(t)-x(t^*)\right|<C\sum_{i=1}^{r}\left|t_i-t_{i-1}\right|^{\lambda}\left\{1+\left|t_i\right|^{2\varepsilon}+\left|t_{i-1}\right|^{2\varepsilon}\right\}$$

r ヲ限リナク大ナラシメル。コノ不等式カラ

$$\left|x(t)-x(t^*)\right|\leqq C\lambda\int_1^{x}t^{\lambda-1}dt+2C\lambda\int_1^{x}t^{\lambda-1+2\varepsilon}dt$$

$t<-t^*$ ニ関シテモ同様。$|t|\leqq t^*$ ニツイテハ，既ニ $|x(t)-x(0)|=|x(t)|<C|t|^{\lambda}\{1+|t|^{2\varepsilon}\}$ ヲ得テ

キル。コレラ三ツヲ一所ニシテ(9)式ヲ成立セシメルヤウナC'ヲ見出スコトハ容易デアル。 ──以上──

定理2. 定理1ニ於テ得タ$\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ナル集合ハ，完全ニ緊ッテ(*in sich kompakt*)キル。

証明: (8)及ビ(9)ニヨッテ明ラカ。

§5. *Lebesgue* 積分ノ導入。 §2ノ問題〔II〕ノ解決ニ移ル。問題〔I〕ハ既ニ§3デ解ケタ，コレノ拡張ガ問題デアルガ、次ノ定理ニヨリ肯定的ナ解決ガ得ラレル。

定理3. §3ニ於イテ基本圖形全部ノツクル集合体ニテ定義シタ加法的測度mハ，ソノ集合体デ連続デアル。即チ[(22)]基本圖形列 $\{\beta_k\}$ ($k=1,2,\text{-------}$) ガ, ----(i)

$$\beta_k \supset \beta_{k-1} \quad (k=1,2,\cdots\cdots) \quad \text{------(ii)}$$

$\prod_{k=1}^{\infty}\beta_k=0$ ヲ満足スレバ，常ニ $\lim_{k\to\infty} m(\beta_k)=0$.

証明: $\beta_k=\beta_k\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i+\beta_k\left(\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\right)$ ト書ク。

コヽニ，$\{\alpha_i\}$ハ定理1ニヨリ．アル與ヘラレタη,ε,Cニ對シテ選ンダ基本圖形ノ系列。

$$\Sigma_k=\beta_k\left(\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\right)$$

---

(22) 〔E〕, §1 *Einiges aus der allgemeinen Masstheorie*, pp. 1−3. Kolmogoroff ノ縮率ノ本ニモノッテキタト思フ。

トオクト，$\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \cdots\cdots \supset \Sigma_n \supset \cdots\cdots$ トナッテキル。アル n ガ $\Sigma_n = 0$ ニナルカ，ソノ様ナ n ガナイカデアル。後者ノヤウナコトハ実ハ起ラナイ。何者，ソレガ起ッタトスレバ，Σ_k ノ元ノ無限系列ガ得ラレル。部分列ヲトッテ收斂セシメ，ソレガ，$\Omega - \Sigma\alpha_i$ ニ屬スルコトヲ，定理 2 ニヨッテ知ル。基本圖形ノ定義カラ β_k ニモ屬ス。即チ $\beta_k(\Omega - \Sigma\alpha_i) = \Sigma_k$ ニ屬ス。コレガスベテノ k ニ就イテ云ヘルト云フコトハ，$\prod\limits_{k=1}^{\infty}\Sigma_k \neq 0$，從ッテ $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k \neq 0$ コレ矛盾。依ッテ充分大ナル k_0 ヲトレバ，

$k \geqq k_0$ ニ對シテ $\beta_k = \beta_k \sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i$。$\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(\alpha_i) < \eta$ ニナルヤウニ $\{\alpha_i\}$ ヲ選ンデ居タノダカラ $m(\beta_k) < \eta$.
$\eta > 0$ ハ定理 1 ニテ述ベタ如ク任意ノ正數。故ニ
$\lim\limits_{k\to\infty} m(\beta_k) = 0$ —— 以上 ——

カクシテ §2.〔II〕デ目指シタ m^* — 測度ヲ得ル。以下コレヲ單ニ m — 測度ト書キ改メル。

§6. スペクトル解析等。完全加法的測度 m ヲ Ω デ定義シ得タカラニハ，Lebesgue 積分（m — 積分）ノ導入ハ，定石ノ教フル所ニ從ヘバヨイ。m — 積分ヲ、基函數ノ積分ニヨッテ近似スルコト等此處ニ述ブルマデモナイ。Brown 運動ニ關スル實驗ト照應シテ重要ナノハ，次ノモノデアル。

$$\int_{\Omega} \Theta^2(A)\,dm = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}(A)^{(23)}, \quad \int_{\Omega} \left|\Theta(A)\right| dm = \frac{\sqrt{\mathrm{M}(A)}}{\sqrt{\pi}}$$

更ニ進ンデ、移動群 $t \longrightarrow t+s$ ヲ考ヘ，$\Theta_s(A)=\Theta(A_s)$ ニヨリ、Ωー空間ニ，流レ（*Strömung*）ヲ考フルトキ，コレガ狭義ノ混合型（*Mischungstypus in engeren Sinne*）デアルコトヲ証明シ $U_t\,F(\Theta)=F(\Theta_t)$ ノ スペクトル 解析等ヲ建設スルコトハ，*Ergodic theory* 一般論ノ結果ヲ援用スレバヨイ。カクシテ，所謂彷徨函数ノ理論ノウチ、眞ニ *eigentlich* ナモノハ *Lebesgue* 積分導入マデノ過程デアルト言ヒ得ルデアラウ。

Ω ニ於ケル殆ンド凡ベテノ函数ガ、アル意味デ微分不可能ナ函数デアルトイフ注目スベキ結果モ，§3 ノ *Lebesgue* 積分ノ導入ニヨリ導カレルモノデアル。

$m(\Omega)=1$ ナルガ故ニ，今マデ用ヒ来ツタ"測度"ヲ，ヨリ印象的ナ"確率"トイフ言葉デ置キ換ヘテヨイ。

§7. 結び：　*Brown* 運動ノ實驗ハ，*Wiener* 等ノ彷徨函数論ヲ促シタ。ソノ理論ハ，加法的集合函数ニ於ケル完全加法的測度論トシテ上述ノ如ク建設サレ、ソノ スペクトル 解析モ，*Hopf*, *Birkhoff* 等ノ *ergodic theory* 一般論カラ得ラレル。最近盛ンニ発展シツヽアルトイフ渦動論（*turbulent motions*）

---

(23) 脚註（19）デ述ベタ統計的法則 I* ニ照應スル。

ニ於テモ，コノ様ニ，適切ナ「言葉」ニ依ル整理ガ行ハレナイモノデアラウカ。

ソレニツケテモ，コノ彷徨函數ノ理論ヲ，コンデハ全然論レナカッタ一般ノ homogeneous random process ノ立場カラ見直ス必要ガアル。シカシ，Kolmogoroff, Lévy[24] 等ノ結果ノ紹介ハ、他日ニ譲リタイ。

---

(24) Annali della R. Scoula Norm. Sup. Pisa, Ser II, 3 (1934).