712
~~681~~. Einfache Algebren ニツイテ.
(Brauer-Weyl ノ方法)

河田 敬義・大井 光四郎 (東大)

"Generalized Riemann matrix and factor sets", Annals of Math. Vol. 37. (1936); "Note on matric algebras," Vol.

38. (1937) デ，Weyl ガ einfache Algebren ノ理論ヲ第一歩カラ Vektor 空間トソノ一次変換トノ関係ヲ用ヒテ，専ラ"matric algebra"トシテ抽象元ヲ用ヒナイデ論ジテ居マス。ソコデハ抽象的ナ取扱ヲ避ケタタメニ説明ノ進マハシニナッタヤウナ点モ見受ケラレルヤウデスガ、ソノ方法ヲ只抽象的ニ見テ，Vektor 空間ヲ Darstellungsmodul ト置換ヘテ見レバ，表現ハ専ラ基礎体ノ上ニノミ考ヘテ、（Weyl ニトッテ形式的ニ見エルト思ハレル）Schiefkörper ノ上ノ表現論ヲ避ケタトイフ点ニ一ツノ特徴ガアルト思ハレマス。

Schiefkörper ハノ表現ヲ考ヘルナラバ Wedderburn ノ分解定理（einfache Algebra $\mathfrak{A}/P$ ハ $P_r \times A$ ト Matrizenalgebra ト Schiefkörper トノ直積ニナル。）ニヨッテ einfache Alg. ハ一ツノ完全ナ System トナルノデスガ，表現ヲ基礎体 P ノ上ニノミ考ヘルナラバ Matrizenalgebra P_n ダケガ完全ナ System トナッテ来ルコトニナリマス。ソレデ Weyl (Brauer) ノ方法ノ根本方針ハ Wedderburn ノ合成定理（normale einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$ ガ P_n ニ einbetten サレルトキニハ，ソノ Kommutator algebra ヲ $\mathfrak{L}/P$ トスレバ．$\mathfrak{A} \times \mathfrak{L} = P_n$ トナル）ニヨッテ問題ヲ常ニ P_n マデ持チ上ゲルコトダト思ヒマス。ソレデ今、専ラコノ方針ニヨッテ Weyl ノ論文ヲ多少簡易化シテ、ソレヲ延長シテ einfache Alg. ノヨク知ラレ

テキル定理 (Deuring, "Algebren" IV. §2, §4) ヲ大体スベテ導キタイト思ヒマス。

使フ定理ハ Wedderburn ノ分解定理ト einfache Alg. ノ基礎体ヘノ表現ハ完全可約デ, 且ツ既約表現ハ只一通リデソノ Grad ハ Minimal ナ Linksideal ノ Rang ニ等シイトイフコトデス。

$\boxed{\text{Satz 1}}$ einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$ ノ P ヘノ s 次ノ既約表現ヲ $\bar{\mathfrak{A}}$ トシ, P_s 中ノ $\bar{\mathfrak{A}}$ ノ Kommutator-algebra ($\bar{\mathfrak{A}}$ ノ各元ト可換ナル P_s ノ元ノ全体ノナス Algebra) $\bar{\mathfrak{L}}/P$ ハ Schiefkörper トナル。

特ニ $\mathfrak{A}/P$ ガ Schiefkörper ナル時ハ $\bar{\mathfrak{L}}/P$ ハ $\bar{\mathfrak{A}}/P$ ト reziprok isomorph トナル。

(証): $\bar{\mathfrak{L}} \ni b$ トスレバ、Schur ノ Lemma カラ $b \neq 0$ ナル限リ $|b| \neq 0$. ∴ b^{-1} ガ存在シテ, $b \in \bar{\mathfrak{L}}$ ナラ $b^{-1} \in \mathfrak{L}$ トナル。又明カニ $\bar{\mathfrak{L}} \ni e$. ∴ $\bar{\mathfrak{L}}$ ハ Schiefkörper トナル。

$\mathfrak{A}/P$ ガ Schiefkörper ナルトキハ $\bar{\mathfrak{A}}/P$ ハ reguläre Darst. トナル。即チ $\mathfrak{A} = u_1 P + \cdots + u_s P$ トスレバ $\alpha \in \mathfrak{A}$ ニ對シテ $\alpha(u_1, \ldots\ldots, u_s) = (u_1, \ldots\ldots u_s)\, a$, $a \in \bar{\mathfrak{A}}$. 之レニ對シテ逆表現 $\bar{\mathfrak{A}}^*$: $(u_1, \ldots\ldots, u_s)\alpha = (u_1, \ldots\ldots, u_s)\, a^*$, $a^* \in \bar{\mathfrak{A}}^*$ ヲ考ヘレバ明カニ $\bar{\mathfrak{A}}^*$ ノ各元ト $\bar{\mathfrak{A}}$ ノ各元トハ可換トナル。

∴ $\bar{\mathfrak{A}}^* \subset \bar{\mathfrak{L}}$. シカルニ $\bar{\mathfrak{L}}$ ハ Schiefkörper ナル故 P_s ニ einbetten サレルタメニハ $(\bar{\mathfrak{L}} : P) \,|\, s$. 一方

$(\overline{\mathfrak{A}}^*:P) = s$ カラ $\overline{\mathfrak{A}}^* = \overline{\mathfrak{A}}$ トナル。　　　Q. E. D.

$\boxed{\text{Satz 2}}$ einfache Alg. $\mathfrak{A}/P = A_r$ (A: Schiefkörper デ Rang ヲ s トスル). ガ P_{rst} = einbetten サレルトキ, P_{rst} = 於ケル Kommutator $\mathfrak{L}/P$ ハ A_t^* トナル。

コヽニ A^* ハ A ト reziprok isomorph トスル。且ツ $\mathfrak{L}$ ノ Kommutator ハ再ビ $\mathfrak{A}$ トナリ.

$$(P_{rst}:P) = (\mathfrak{A}:P)(\mathfrak{L}:P).$$

(証) $t=1$ ノ時ニハ $\mathfrak{A}/P$ ノ P_{rs} ヘノ表現 $\overline{\mathfrak{A}}$ ハ既約デ. $\overline{\mathfrak{A}} \ni a = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots\ldots, r)$. ($a_{ij} \in \overline{A}$: A ノ reguläre Darst.) トスレバ, ソノ Kommutator $b = (b_{ij})$ ハ einfache Alg. ノ Zentrum ヲモトメル時ト同様ニ $b_{11} = \cdots\cdots = b_{rr}$. $b_{ij} = 0$. $i \neq j$. $b_{11} \in \overline{A}^*$ (A^* ノ reg. Darst) トナル。

$$\therefore \quad \mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \overline{A}^* & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{A}^* \end{pmatrix} \cong A^*$$

トナル。

$t \neq 1$ ノ時ニハ P_{rst} ヘノ $\mathfrak{A}$ ノ Einbettung ハ $\overbrace{\begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{A}} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\mathfrak{A}} \end{pmatrix}}^{t\text{ 箇}}$ ノ形トナル。

$\mathfrak{L} \ni b = (b_{ij})$, $(i, j = 1, \ldots\ldots t)$ トオケバ直ニ $b_{ij} = \overbrace{\begin{pmatrix} \overline{b}_{ij} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{b}_{ij} \end{pmatrix}}^{r\text{ 箇}}$,

$\overline{b}_{ij} \in \overline{A}^*$ トナル。

$\therefore\ b = (\overline{b}_{ij}) \times E_r$ (Kronecker 積).

$(i, j = 1, \ldots\ldots t)$ $\therefore\ \mathfrak{L} \cong A^*_t$ トナル。

次ニ Rang ノ関係ハ $(\mathfrak{A} : P) = sr^2$, $(\mathfrak{L} : P) = st^2$ カラ。又 $\mathfrak{L}$ ノ Kommutator ガ $\mathfrak{A}$ トナルコトハ Rang ノ関係カラワカル。 Q. E. D.

$\boxed{\text{Satz 3}}$ Normalen Schiefkörper A/P ノ Rang ヲ s トスレバ, A ト reziprok isomorph ナ Schiefkörper ヲ A^*/P トスレバ $A \times A^* = P_s$ トナル。

(証) A/P ノ P_s ヘノ既約表現 $\overline{A}$ ヲ考ヘレバ Satz 1 カラ, ソノ Kommutator ハ $\overline{A}^*/P$ トナル。($\overline{A}^*$ ハ A^* ノ表現)。$\overline{A}, \overline{A}^*$ ヲ含ム P_s ノ最小ノ Algebra $\mathfrak{L}/P$ ハソレニ含マレル $\overline{A}$ ガ既約ナル故 einfache Alg. 且ツソノ Kommutator ハ $\overline{A}, \overline{A}^*$ ノ Kommutator $\overline{A}^*, \overline{A}$ ノ共通部分ニ入ラネバナラナイ, $\therefore$ P ダケデアル。(A ノ normal ナルコトカラ)。 $\therefore$ Satz 2 カラ $(\mathfrak{L} : P) = (P_s : P)$ $\therefore\ \mathfrak{L} = P_s$. $\overline{A}$ ノ元ト $\overline{A}^*$ ノ元トハ可換デ, $(\mathfrak{L} : P) = (\overline{A} : P)(\overline{A}^* : P)$ カラ $\overline{A} \times \overline{A}^* = \mathfrak{L} = P_s$ トナル。 Q. E. D.

$\boxed{\text{Satz 4}}$ einfache Algebren $\mathfrak{A}/P$, $\mathfrak{L}/P$ ノ中 $\mathfrak{A}/P$ ガ normal ナル時ハ $\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}$ モ亦 einfache トナル。ソノ Zentrum Z ハ $\mathfrak{L}$ ノ Zentrum $Z_{\mathfrak{L}}$ ト一致スル。

(証) $\mathfrak{A} = A \times P_r$, $\mathfrak{L} = B \times P_t$ (A, B ハ Schiefkörper) ト分解スレバ Satz 3 カラ $A \times A^* = P_s$ トナ

ルコトカラ

(1) $A^* \times (\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}) = (A^* \times A) \times (B \times P_{rt}) = B \times P_{rst}$

(1) ノ右辺ガ einfach デアルカラ左辺ノ $\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}$ ハ echt ナ zweiseitiges Ideal C ヲ含ムコトガ出来ナイ。(若シ含メバ $A^* \times C$ ガ $B \times P_{rst}$ ノ echt ナ Ideal トナルカラ)。$\therefore$ $\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}$ ハ einfach トナル。明カニ $Z \supset Z_{\mathfrak{L}}$ ナルモ、(1) カラ $Z_{\mathfrak{L}} \supset Z$ トナルカラ $Z = Z_{\mathfrak{L}}$ トナル。 Q. E. D.

$\boxed{\text{Kor. 1}}$ Normale einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$, $\mathfrak{L}/P$ ノ直積モ亦 normal einfach トナル。

$\boxed{\text{Kor. 2}}$ normale einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$ ト kommutativer Körper K トノ直積 $\mathfrak{A}_K$ ハ K ノ上ノ normale einfache Alg. トナル。

$\boxed{\text{Lemma}}$ Alg. $\mathfrak{L}$ ニ含マレル einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$, $\mathfrak{L}/P$ ニテ、$\mathfrak{A}/P$ ガ normal デ、$\mathfrak{A}$ ノ元ト $\mathfrak{L}$ ノ元トガ可換ナルトキニハ $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$ ヲ含ム $\mathfrak{L}$ ノ最小ノ Teilalgebra $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{L}$ ハ $\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}$ ト isomorph トナル。

(証) Satz 4 カラ $\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}$ ハ einfache Alg. $\therefore$ $\mathfrak{A} \times \mathfrak{L}$ カラ $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{L}$ ヘノ homomorph ナ對應ハ isomorph トナル。 Q. E. D.

$\boxed{\text{Satz 5}}$ normale einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$ ガ P_n ニ einbetten サレルトキ、ソノ Kommutator ヲ $\mathfrak{L}/P$ トスレバ $P_n = \mathfrak{A} \times \mathfrak{L}$ トナル。

(証) Lemma カラ $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{L} < P_n$. Rang ヲ

比ベテ $\mathfrak{A}\times\mathfrak{L} = P_n$ トナル。 Q.E.D.

$\boxed{\text{Satz 6}}$ normale einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$ ノ einfache Teilalg. $\mathfrak{L}/P$ ノ $\mathfrak{A}$ ニオケル Kommutator alg. ヲ $\mathfrak{C}/P$ トスレバ, $\mathfrak{C}$ ハ einfach トナリ、$\mathfrak{A}=A_r$, $\mathfrak{L}=B_s$, $\mathfrak{C}=\Gamma_t$ トスレバ $A^*\times B = \Gamma_u^*$ トナル (* ハ reziproke isomorph ヲ示ス)。又 $(\mathfrak{A}:P)=(\mathfrak{L}:P)(\mathfrak{C}:P)$ トナリ。$\mathfrak{C}$ ノ Kommutator ハ再ビ $\mathfrak{L}$ トナル。

(証) $\mathfrak{A}/P$ ヲ P_n ニ einbetten シテ, P_n ニオケル $\mathfrak{A}, \mathfrak{L}$ ノ Kommutator ヲ $\mathfrak{A}', \mathfrak{L}'$ トスルト, $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{L}'$ デアル。Lemma カラ $\mathfrak{A}'\cdot\mathfrak{L} = \mathfrak{A}'\times\mathfrak{L}$ トナリ、$\mathfrak{C}$ ハソノ P_n ニオケル Kommutator トナル。Satz 2 カラ $A^*\times B \sim \Gamma^*$ ガ直チニ出テ来ル。Rang ノ関係ハ $(\mathfrak{A}:P)=a$, $(\mathfrak{L}:P)=b$ トスレバ, 先ヅ

$$(\mathfrak{A}'\times\mathfrak{L}:P) = (\mathfrak{A}':P)\cdot(\mathfrak{L}:P) = \frac{n^2}{(\mathfrak{A}:P)}\, b = \frac{n^2 b}{a}$$

$$\therefore\ (\mathfrak{C}:P) = (\mathfrak{A}\cap\mathfrak{L}':P) = \frac{n^2}{(\mathfrak{A}'\times\mathfrak{L}:P)} = \frac{a}{b}$$

トナル。 Q.E.D.

之レカラ Deuring: Algebren IV. §4. S46−47 ト同様ニ Zerfällungskörper ニ関スルコトガ導カレルガ, 只一ツ別ニ証明シナクテハナラヌノハ

$\boxed{\text{Satz 7}}$ normaler Schiefkörper A/P トソノ Zerfällungskörper Z/P ガアルトキ Z ヲ A_r ニ einbetten スルトキ r ヲ最小ニトレバ Z ハ A_r ノ

maximaler Teilkörper トナッテ$(A_\gamma : P) = (Z:P)^2$ トナル。

$\because$. A_γ 中ノ Z ノ Kommutator ヲトレバ, Z ガ分解体ナルコトカラ $Z \times P_s$ トナル。再ビ A_γ ニオケル P_s ノ Kommutator ヲトレバ、Satz 6 カラ $A_{\frac{\gamma}{s}}$ ト isomorph デZヲ含ム。$\therefore$ γヲ最小ニトッタノデアルカラ $t=1$ デナクテハナラナイ。 Q. E. D.

最後ニ normale einfache Alg. ノ Automorphismus ニツイテハ

$\boxed{\text{Satz 8}}$ normale einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$ ノ二ツノ einfache Teilalg. $\mathfrak{L}_1/P$, $\mathfrak{L}_2/P$ トガ, P ノ元ヲ自分自身ニ對應サセテ互ニ isomorph ナラバ、($\alpha_1 \longleftrightarrow \alpha_2$ トスル). $\beta, \beta^{-1} \in \mathfrak{A}$ ガ存在シテ $\alpha_1 = \beta\alpha_2\beta^{-1}$ トナル。

(証) $\mathfrak{A}/P$ ヲ P_n ニ einbetten シテ, ソノ Kommutator ヲ $\mathfrak{A}'$ トスレバ、Satz 5 カラ $P_n = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ トナル。Lemma カラ $\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{A}' = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{A}' = \mathfrak{L}_2 \times \mathfrak{A}'$ トナリ、之レ等ハ $\mathfrak{A}'$ ガ normal einfach ナル故 einfach トナル。今ソレ等ノ間ノ isomorph ナ對應トシテ、$\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ デハ $\alpha_1 \longleftrightarrow \alpha_2$, $\mathfrak{A}'$ デハ自分自身ヲ對應サセレバ, 夫ハ P_n ニオケル äq. ナ表現ヲ示ス。$\therefore$ $\beta \in P_n$ ガアッテ $\alpha_1 = \beta\alpha_2\beta^{-1}$ トナル。一方 β ハ $\mathfrak{A}'$ ノ元トハ可換トナルカラ ($\mathfrak{A}'$ ノ元 α' デハ $\alpha' = \beta\alpha'\beta^{-1}$ ナル故) $\beta^{-1}, \beta \in \mathfrak{A}$ トナル。 Q. E. D.

$\boxed{\text{Kor}}$ normal einfache Alg. $\mathfrak{A}/P$. P ノ元ヲカヘナイ Automorphismus ハ innere Automorphismus デアル。