711
~~680~~. # Banach 空間ニ於ケル linear Operator ノ iteration ニ就イテ

角谷　静夫（阪大）

C. Visser ハ Proc. Acad. Amsterdam 1938ニテ Hilbert 空間ノ linear operator A ニ對シテ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}$ ノ收斂ヲ論ジ, $\{A^n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ一樣ニ有界ナルトキ（即チ $\|A^n\|\leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナルCガ存在スルトキ）ハコレガ弱收斂シ, Aガ完全連續デ且ツ $\{A^n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ一樣ニ有界ナルトキハコレガ強收斂スルコトヲ示シタ（吉田氏ノ前号ノ談話 679 參照）。トコロガコノ第二ノ結果ハ吉田氏ニヨツテ一般ノ complex Banach 空間ニテ成立スルコトガ證明サレタ。（吉田氏ノ本号ノ談話參照）吉田氏ノ方法ハ積分方程式ノ議論ヲ一般ノ complex Banach 空間ニテ行フモノデコノ方法ニヨツテ Kryloff-Bogoliouboff ノ結果モ亦一般ノ complex Banach 空間ヘ拡張サレルノデアル。次ニコヽデ述ベルノハコレラノ結果ヲ比較的ニ初等的ナ方法デ證明スルコトデアル。特ニ Banach 空間ガ locally weakly compact デアルトキ Visser ノ第一ノ結果モ Banach 空間ヘ拡張出來ルコトガ證明サレル。即チ、Visser ノ定理（吉田氏ノ前号ノ談話 679, 294 頁）ガ inner product ノ考ヘヲ用ヒナイデ證明出來ルノデアル。先ヅ §1 ニ於テコノ一般ノ場合ヲ證明シ、§2 ニテ

完全連続ニ関スル假定ノアル場合ヲ論ジル。§2ニテ得ラレル結果ハ吉田氏ガ得ラレタモノト同ジデアル。尚ホ、コノ問題ニ関シテ色々御教示ヲ受ケタ吉田氏ニ感謝致シマス。

§1

定理1. Eヲ complex Banach 空間, AヲEヲEノ中ヘ寫像スル linear operator デ且ツ $\{A^n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ一様ニ有界ナルモノトスル。即チ $\|A^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ C ガ存在スルモノトスル。* 然ルトキハ若シEガ locally weakly compact デアレバEヲEノ中ヘ寫ス bounded linear operator A_1 ガ存在シテ $\dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n} \longrightarrow A_1$ (weakly) トナル。

即チ任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $\dfrac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx}{n} \longrightarrow A_1x$

(weakly) トナル。シカモコノ A_1 ハ

(i) $\|A_1\| \leqq C$

(ii) $AA_1 = A_1A = A_1$, $A^nA_1 = A_1A^n = A_1$ $(n=2,3,\cdots\cdots)$

(iii) $A_1^2 = A_1$

ヲ満足スル。

Eガ locally weakly compact デアルトイフノハ任意ノEノ有界ナ点列 $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ (即チ $\|x_n\| \leqq M$.

---

* $C<1$ ナルトキハ $\|A^n\| \leqq C^n \longrightarrow 0$ ニテ定理ハ trivial ナル故 $C \geqq 1$ ト假定スル。

$n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キMガ存在スルモノ）ヨリ E ノ一点 x_0 ニ弱收斂スル部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ撰ビ得レコトデアル。

Hilbert 空間ハ明カニ locally weakly compact デアル。

証明： 先ヅ E ガ separable ナルトキヲ証明スル。E ニテ dense ナ可附番集合 $D=\{x_k\}$, $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ取リ、各々ノ x_k ニ對シテ点列 $\left\{\dfrac{Ax_k+A^2x_k+\cdots\cdots+A^nx_k}{n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ考ヘル。コレラハ何レモ norm ガ $C\cdot\|x_k\|$ ヲ超ヘナイカラ E ガ locally weakly compact ナルコトヨリ任意ノ部分列 $\left\{\dfrac{Ax_k+A^2x_k+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x_k}{n_\nu}\right\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ カラソノ部分列 $\left\{\dfrac{Ax_k+A^2x_k+\cdots\cdots+A^{n'_\nu}x_k}{n'_\nu}\right\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ撰ンデ、コレガ E ノ一点 y_k ニ弱收斂スルヤウニ出来ル。ヨッテ對角線論法ヲ行ヘバ適當ニ $\{m_\nu\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ヲトレバ $\left\{\dfrac{Ax_k+A^2x_k+\cdots\cdots+A^{m_\nu}x_k}{m_\nu}\right\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ハ任意ノ k ニ對シテ E 内ノ一点 y_k ニ弱收斂スル。然ルニ $\{x_k\}$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ハ E ニテ dense デアリ且ツ $\left\|\dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{m_\nu}}{m_\nu}\right\|\leqq C$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ デアルカラ任意ノ $x\in E$ ニ對シテ $\left\{\dfrac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{m_\nu}x}{m_\nu}\right\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ハ E ノ一点ニ弱收斂スル。コノ点ヲ $y=A_1x$ トスレバ $x\to A_1x$ ハ明ラカニ linear operation デ

アル。

コレデ A_1 ハ決定サレタノデアルガ今マデニ証明シタコトハ

$$(1)\quad \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{m_\nu}}{m_\nu} \longrightarrow A_1, \qquad weakly$$

ト云フコトデアツテ

$$(2)\quad \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{n}}{n} \longrightarrow A_1 \qquad weakly$$

ガ証明サレタノデハナカツタ。(2) ヲ証明スルタメニ先ヅ此ノ如クシテ得ラレタ *linear operator* A_1 ガ性質 (i), (ii), (iii) ヲ満足スルコトヲ証明シヨウ。

A_1 ガ $\|A_1\| \leqq C$ ヲ満足スルコトハ殆ンド明カデアル。コレハ

$$\left\| \lim_{\nu\to\infty} \frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{m_\nu}x}{m_\nu} \right\| \leqq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left\| \frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{m_\nu}x}{m_\nu} \right\|$$

$$\leqq C\cdot\|x\|$$

ヨリ明カデアル。次ニ (ii) ヲ証明スルタメニ (1) 式ノ両辺ニ左カラ A ヲカケレバ

$$\frac{A^2+A^3+\cdots\cdots+A^{m_\nu+1}}{m_\nu} \longrightarrow AA_1 \qquad weakly$$

ヲ得ル。然ルニ

$$\left\| \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{m_\nu}}{m_\nu} - \frac{A^2+A^3+\cdots\cdots+A^{m_\nu+1}}{m_\nu} \right\| = \left\| \frac{A-A^{m_\nu+1}}{m_\nu} \right\|$$

$$\leqq \frac{2\cdot C}{m_\nu} \longrightarrow 0$$

デアルカラ、コレト(1)トヨリ $AA_1 = A_1$ ヲ得ル。$A_1A = A_1$ モ全ク同様ニシテ得ラレル。$A^nA_1 = A_1A^n = A_1$ ($n = 2, 3, \cdots\cdots$) トナルコトモ明カ。

(iii) ヲ証明スルタメニハ (1) 式ノ両辺ニ左カラ A_1 ヲカケレバヨイ。

$$\frac{A_1A + A_1A^2 + \cdots\cdots + A_1A^{m_\nu}}{m_\nu} \longrightarrow A_1A_1$$

トナルガ $A_1A^n = A_1$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) デアルカラ左辺ハ実ハ A_1 ニヒトシイ。ヨツテ $A_1 = A_1^2$.

コレダケノ準備ヲシテカラ (2) ガ成立スルコトヲ証明スル。若シモ (2) ガ成立シナケレバ少クトモ一ツノ $x_0 \in E$ ニ對シテ $\left\{\dfrac{Ax_0 + A^2x_0 + \cdots\cdots + A^nx_0}{n}\right\}$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ハ A_1x_0 ニ弱收斂シナイ。ヨツテ、コレラハ norm ガ有界デアルカラ適當ニ $\{n_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) ヲトレバ

$$\frac{Ax_0 + A^2x_0 + \cdots\cdots + A^{n_\nu}x_0}{n_\nu} \longrightarrow y_0 \neq A_1x_0 \quad \text{weakly} \tag{3}$$

トナル。シカルニ (1) ヲ得タトキノ証明ハ初メニ系列 $\left\{\dfrac{A + A^2 + \cdots\cdots + A^n}{n}\right\}$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) カラ出發スル代リニソノ任意ノ部分列 $\left\{\dfrac{A + A^2 + \cdots\cdots + A^{n_\nu}}{n_\nu}\right\}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) カラ出發シテモヨカツタノデアルカラ (我々ノ証明シタノハ operator ノ系列 $\left\{\dfrac{A + A^2 + \cdots\cdots + A^n}{n}\right\}$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ガ weakly compact デアルト云フコトデアツタ!) (1) ヲ得タノト全ク同ジ對角線論法デ $\{n_\nu\}$ ノ部分列 $\{m'_\nu\}$ ヲ適當ニトツテ

$$(4)\quad \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{m'_\nu}}{m'_\nu} \longrightarrow A'_1 \quad weakly$$

トナラシメルコトが出來ル。コヽニ A'_1 ハ A_1 ト同様ナ性質 (i), (ii), (iii) ヲミツ bounded linear operator デアル。シカモ $A'_1 x_0 = y_0 \neq A_1 x_0$ デアルカラ operator トシテ $A_1 \neq A'_1$ デアル。

然ルニ (4) 式ノ両辺ニ左カラ A_1 ヲカケレバ (iii) ヲ證明シタノト同様ニシテ $\frac{A_1A+A_1A^2+\cdots\cdots+A_1A^{m'_\nu}}{m'_\nu} \longrightarrow A_1A'_1$, $A_1 \longrightarrow A_1A'_1$ ヲ得レカラ $A_1 = A_1A'_1$. 又 (1) 式ノ両辺ニ右カラ A'_1 ヲカケレバ A'_1 ハ A_1 ト同様ニ $A^nA'_1 = A'_1A^n = A'_1$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ満足スルカラ全ク同様ニシテ $A'_1 = A_1A'_1$ ヲ得ル。ヨツテ結局 $A_1 = A'_1$ $(= A_1A'_1)$。コレハ上ニテ得ラレタ $A_1 \neq A'_1$ ト矛盾スルカラ (2) が成立シナケレバナラナイ。

コレデ E が separable デアル場合ノ證明が終ル。E が separable デナイトキニハ任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $x, Ax, A^2x, \cdots\cdots, A^nx, \cdots\cdots$ が張ル closed linear subspace E_1 ヲ考ヘル。(closed ト云フノハ strong convergence ノ意味デ) E_1 ハ明カニ separable デ且ツ A ハ E_1 ヲ E_1 ノ中ヘ寫像スル linear operator デアル。シカモ Mazur ノ定理ニヨツテ closed linear subspace E_1 ハ weak convergence ノ意味デモ closed ニナルカラ E ガ locally weakly compact デアレバ E_1 モ亦 locally weakly compact ニナル。ヨッテ E_1 ニ對シテ定理ノ條件ガ滿足サレテヰルカラ E_1 ニテ $\dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}\longrightarrow A_1$ (weakly). 即チ E_1 ノ各点 x ニ対シテ $\dfrac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx}{n}\longrightarrow A_1x$ (weakly).

x ハ任意ノ点デアッタカラ、コレハ E 全体デ成立スル。(証明終)

A_1 ハ一般ノ Banach 空間ニ於ケル projection ノ様ナモノデアル。(勿論一般ノ Banach 空間ニテハ任意ノ closed linear subspace ニ對シテソレヘノ projection ガアレトハ限ラナイ！) C. Visser ハ Hilbert 空間ノ場合 A ガ unitary ナラバ $\dfrac{A+A^2+\cdots+A^n}{n}\longrightarrow A_1$ ガ strongly ニ成立スルコトヲ示シ、コレガ J. v. Neumann ノ mean ergodic theorem ニナルコトヲ述ベテヰルガ一般ノ Banach 空間ニテ A ガ isometric ト云フコトダケカラ上ノ strong convergence ハ得ラレナイノデアロウカ。

定理 2. 定理 1 ト同ジ條件ノ下デ次ノコトガ成立スル： $|\lambda|=1$ ナル complex number λ ニ對シテ bounded linear operator A_λ ガ存在シテ

(5) $$\frac{1}{n}\left(\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{\lambda^n}\right)\longrightarrow A_\lambda \quad (\textit{weakly})$$

トナリ且ツ

(i) $\|A_\lambda\|\leqq C$

(ii) $AA_\lambda=A_\lambda A=\lambda A_\lambda,\quad A^nA_\lambda=A_\lambda A^n=\lambda^nA_\lambda$

$(n=2,3,\cdots\cdots)$

(iii) $A_\lambda^2=A_\lambda$

(iv) $\lambda\neq\mu$ ナラバ $A_\lambda\cdot A_\mu=A_\mu\cdot A_\lambda=0$

(v) $A_\lambda\neq 0$ トナルノハ λ ガ A ノ固有値ナルトキ，且ツソノトキニ限ル。

(vi) $A_{\lambda_1},\ A_{\lambda_2},\cdots\cdots,A_{\lambda_p}\neq 0$ ナルトキ $A'=A-(\lambda_1A_{\lambda_1}+\lambda_2A_{\lambda_2}+\cdots\cdots+\lambda_pA_{\lambda_p})$ トオケバ $A'A_{\lambda_i}=A_{\lambda_i}A'=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,p)$； $AA'=A'A=A'^2$ ニテ且ツ $\|A'^n\|\leqq C'(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナル如キ C' ガ存在スル。

(vii) A' ノ固有値ノ全体ハ A ノ固有値ノ全体カラ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_p$ ヲ取リ去ツタモノデアル。

証明： $\frac{1}{n}\left(\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{\lambda^n}\right)$ ガ任意ノ $|\lambda|=1$ ニ對シテ弱收斂スルコトハ定理1ト全ク同様ニスレバ得ラレル。コレハ A ノ代リニ $\frac{A}{\lambda}$ ヲ考ヘレバ $\left\|\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n\right\|=\|A^n\|\leqq C$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ トナルコトヨリ明カデアル。此ノ如クシテ得ラレタ *linear operator* A_λ ハ定理1ニヨリ

$$\|A_\lambda\|\leqq C,\quad \frac{A}{\lambda}\cdot A_\lambda=A_\lambda\cdot\frac{A}{\lambda}=A_\lambda,\quad A_\lambda^2=A_\lambda$$

ヲ満足スルカラコレヨリ條件(i),(ii),(iii)ヲ満足スルコトハ

明カデアル。

(iv) ヲ証明スルタメニハ (5) ノ両辺ニ右カラ A_μ ヲカケレバヨイ。

$$\frac{1}{n}\left(\frac{AA_\mu}{\lambda}+\frac{A^2A_\mu}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\frac{A^nA_\mu}{\lambda^n}\right)\to A_\lambda A_\mu$$

(weakly)

ニテ左辺ハ $A^KA_\mu=\mu^KA_\mu$ $(K=1,2,\cdots\cdots)$ トナルカラ

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\mu}{\lambda}+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n\right)\cdot A_\mu\to A_\lambda A_\mu.\ (\text{weakly})$$

然ルニ $\frac{1}{n}\left(\frac{\mu}{\lambda}+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n\right)$ ハ $\mu\neq\lambda$ ナルトキ $\to 0$ デアルカラ左辺 $\to 0$ (strongly). 故ニ $A_\lambda A_\mu=0$.

(v) ノ証明: λ ガ A ノ固有値ナラバ $Ax_0=\lambda x_0$, $x_0\neq 0$ ナル $x_0\in E$ ガ存在スル。コノ x_0 ニ對シテ

$$\frac{1}{n}\left(\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{\lambda^n}\right)x_0=x_0$$ デアルカラ $n\to\infty$ ナラシメレバ $A_\lambda x_0=x_0\neq 0$. ヨッテ $A_\lambda\neq 0$ デアル。

逆ニ $A_\lambda\neq 0$ デアレバ少クトモ一ツノ $x_0\in E$ ニ對シテ $A_\lambda x_0\neq 0$. $y_0=A_\lambda x_0$ トオケバ $y_0\neq 0$ ニテ且ツ $Ay_0=AA_\lambda x_0=\lambda A_\lambda x_0=\lambda y_0$ ヨッテ λ ハ A ノ固有値デアル。

(vi) ノ証明: $A'=A-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\cdot A_{\lambda_j}$ ノ両辺ニ右カラ A_{λ_i} ヲカケレバ

$$A'A_{\lambda_i}=AA_{\lambda_i}-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j A_{\lambda_j}A_{\lambda_i}=AA_{\lambda_i}-\lambda_i A_{\lambda_i}A_{\lambda_i}=\lambda_i A_{\lambda_i}$$
$-\lambda_i A_{\lambda_i}=0$. ヨッテ $A'A_{\lambda_i}=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,p)$. 同様ニ $A_{\lambda_i}A'=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,p)$. ヨッテ又

$$AA'=\left(A'+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j A_{\lambda_j}\right)A'=A'^2+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j A_{\lambda_j}A'=A'^2$$

同様ニ $A'A=A'^2$. 更ニ

$$A=\lambda_1 A_{\lambda_1}+\lambda_2 A_{\lambda_2}+\cdots\cdots+\lambda_p A_{\lambda_p}+A'$$

ノ両辺ヲ乗ズレバ $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2},\cdots\cdots, A_{\lambda_p}, A'$ ハ何レノ二ツモ互ニ *orthogonal* デ且ツ $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2},\cdots\cdots, A_{\lambda_p}$ ハ *idempotent* デアルカラ

(6) $\quad A^n=\lambda_1^n A_{\lambda_1}+\lambda_2^n A_{\lambda_2}+\cdots\cdots+\lambda_p^n A_{\lambda_p}+A'^n,\quad n=1,2,\cdots\cdots$

コレヨリ

$$\|A'^n\|\leqq\|A^n\|+\|A_{\lambda_1}\|+\|A_{\lambda_2}\|+\cdots\cdots+\|A_{\lambda_p}\|$$
$$\leqq C+C+C+\cdots\cdots+C=(p+1)C=C',\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

ヲ得ル。

(vii) ノ証明: λ ガ A' ノ固有値ナラバ $A'x_0=\lambda x_0$, $x_0\neq 0$ ナル $x_0\in E$ ガ存在スル。

コノ x_0 ハ $Ax_0=A\left(\dfrac{A'x_0}{\lambda}\right)=\dfrac{1}{\lambda}AA'x_0=\dfrac{1}{\lambda}A'^2x_0$ $=\lambda x_0$ ヲ満足スルカラ λ ハ又 A ノ固有値デアル。且ツ λ ハドノ λ_i $(i=1,2,\cdots\cdots,p)$ トモ等シクナイ。何トナレバ、モシ $\lambda=\lambda_i$ ナラバ $A'_{\lambda_i}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{A}{\lambda_i}+\dfrac{A^2}{\lambda_i^2}+\cdots\cdots+\dfrac{A^n}{\lambda_i^n}\right)$

ヲ考ヘタトキ、コレハ (vi) ニヨッテ $\|A'^{n}\| \leqq C'$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) デアルカラ weakly ニ存在シ且ツ $Ax_0=\lambda_i x_0$, $x_0 \neq 0$ ナル $x_0 \in E$ ガアルコトヨリ $A'_{\lambda_i} x_0 = x_0 \neq 0$ トナッテ $A'_{\lambda_i} \neq 0$ トナル。然ルニ他方 (6) ヨリ

$$\frac{1}{n}\left(\frac{A}{\lambda_i}+\frac{A^2}{\lambda_i^2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{\lambda_i^n}\right)=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}+\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right)^n\right)A_{\lambda_j}$$

$$+\frac{1}{n}\left(\frac{A'}{\lambda_i}+\frac{A'^2}{\lambda_i^2}+\cdots+\frac{A'^n}{\lambda_i^n}\right)$$

トナッテ左辺ハ $\longrightarrow A_{\lambda_i}$ (weakly), 右辺ハ $A_{\lambda_i}+A'_{\lambda_i}$ (weakly) トナル。コレヨリ $A_{\lambda_i}=A_{\lambda_i}+A'_{\lambda_i}$, $A'_{\lambda_i}=0$ ヲ得ルカラコレハ矛盾デアル。ヨッテ $\lambda \neq \lambda_i$ ($i=1,2,\cdots\cdots,p$) デアル。

逆ニ λ ガ A ノ固有値ニテ且ツ $\lambda \neq \lambda_i$ ($i=1,2,\cdots\cdots,p$) デアレバ $Ax_0=\lambda x_0$, $x_0 \neq 0$ ナル $x_0 \in E$ ガ存在スル。コノ両辺ニ左カラ A_{λ_i} ヲカケレバ $A_{\lambda_i}Ax_0=A_{\lambda_i}(\lambda x_0)$, $\lambda_i A_{\lambda_i} x_0 = \lambda A_{\lambda_i} x_0$ トナルカラ $\lambda \neq \lambda_i$ ナルコトヨリ $A_{\lambda_i} x_0 = 0$ ($i=1,2,\cdots\cdots,p$) ヨッテ

$$Ax_0=\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j A_{\lambda_j}+A'\right)x_0=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j A_{\lambda_j}x_0+A'x_0=A'x_0$$

即チ $A'x_0=Ax_0=\lambda x_0$, $x_0 \neq 0$. ヨッテ λ ハ A' ノ固有値デアル。

§ 2

定理 3. E ヲ complex Banach 空間, A ヲ E

ヲ E ノ中ヘ寫像スル完全連續 (vollstetig) ナ linear operator デ且ツ $\{A^n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ一様ニ有界ナルモノトスル。然ルトキハ E ヲ E ノ中ヘ寫像スル完全連續ナ linear operator A_1 ガ存在シテ $\dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n} \longrightarrow A_1$ (strongly) トナル。即チ任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $\dfrac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx}{n} \longrightarrow A_1x$ (strongly) トナル; シカモコノ A_1 ハ定理1ニ於ケル條件 (i), (ii), (iii) ヲ満足スル。

證明ハ定理1ト全ク同様ニスルコトガ出來ル。弱收斂ガ強收斂デオキカヘラレルノハ A ガ完全連續デアルタメデアル。實際 A ガ完全連續デアレバ任意ノ $x \in E$ ニ對シテ

$$\left\{\frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx}{n}\right\}=\left\{A\left(\frac{x+Ax+\cdots\cdots+A^{n-1}x}{n}\right)\right\}\ (n=1,2,\cdots)$$

ハ $\left\|\dfrac{x+Ax+\cdots\cdots+A^{n-1}x}{n}\right\| \leqq C\cdot\|x\|$ デアルカラ totally bounded ナ集合デコレヨリ強收斂スル部分列ガ得ラレルノデアル。ヨッテコノトキハ E ガ locally weakly compact デアルトイフ假定ハイラナイ。(定理1デモ實ハ E ガ locally weakly compact デアル必要ハナク A ガ E ノ bounded ナ部分ヲ weakly compact ナ集合ニウツス如キ linear operator デアレバヨカッタノデアル!) E ノ separabity ニ關スル假定ノイラナイコトハ定理1ノ場合ト同様ニ示スコトガ出來ル。A_1 ガ完全

連續ニナルコトハ $\|x\|\leqq 1$ ノ $y=A_1x$ ニヨル寫像ガ $\|x\|\leqq C$ ノ $y=Ax$ ニヨル寫像ニ含マレテヰルコトヨリ容易ニワカル。(實ハ A_1 ノ値域ガ有限次元ニナツテシマフノデアル。コレハ任意ノ $x\in E$ ニ對シテ $y=A_1x$ ハ $Ay=AA_1x=A_1x=y$ ヲ滿足シテ A ノ $\lambda=1$ ノ固有空間ニ屬スルコトヨリ直ニワカル。A ガ完全連續ナトキハ Riesz ノ定理ニヨリ各々ノ固有空間ハ有限次元デアル)

定理4. 定理3ト同ジ條件ノモトニ次ノコトガ成立スル:

$|\lambda|=1$ ナル complex number λ ニ對シ完全連續ナ linear operator A_λ ガ存在シテ

$$(7)\qquad \frac{1}{n}\left(\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{\lambda^n}\right)\to A_\lambda \quad (\text{strongly})$$

トナリ且ツコノ A_λ ハ定理2ニ於ケル性質 (i)—(vii) ヲ滿足スル。

特ニ A ガ完全連續ナルコトヨリ、Riesz ノ定理ニヨツテ絶對値 1 ナル A ノ固有値ハ有限個シカナイ。コレヲ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_p$ トスレバ $A_{\lambda_1},A_{\lambda_2},\cdots\cdots,A_{\lambda_p}\neq 0$ ニテ

$$A'=A-(\lambda_1A_{\lambda_1}+\lambda_2A_{\lambda_2}+\cdots\cdots+\lambda_pA_{\lambda_p})$$

ハ又一ツノ完全連續ナ linear operator デ A' ハ十分小サイ $\delta>0$ ニ対シテ $|\lambda|\geqq 1-\delta$ ナル固有値ヲ全然モタズ且ツ $\|A'^n\|\leqq K(1-\delta)^n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ成立スル如キ K ガ存在スル。

ヨッテ (6) 式ヨリ

$$A^n = \lambda_1^n A_{\lambda_1} + \lambda_2^n A_{\lambda_2} + \cdots\cdots + \lambda_p^n A_{\lambda_p} + A'^n,$$

$$\|A'^n\| \leqq K \cdot (1-\delta)^n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

コレヨリ次ノ定理ヲ得ル。

定理5. 定理3ト同ジ條件ノ下デ次ノコトガ成立スル：

(i) $A^n \longrightarrow 0$ (*uniformly*) ナルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ A ガ絶對値 1 ノ固有値ヲモタヌコトデアル。

(ii) $A^n \longrightarrow B \neq 0$ (*uniformly*) ガ成立スルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ A ガ 1 ヲ固有値トシテ持チ、且ツ 1 以外ノ絶對値 1 ノ固有値ヲモタヌコトデアル。

(i) 及ビ (ii) ニ於テ A^n ガ一樣收斂スルトキハソノ早サハ $(1-\delta)^n$ ノ *order* デアル。即チ (i) ニテハ $\|A^n\| \leqq K(1-\delta)^n$, (ii) ニテハ $\|A^n - B\| \leqq K(1-\delta)^n$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ成立スル。

(iii) $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{A}{\lambda} + \dfrac{A^2}{\lambda^2} + \cdots\cdots + \dfrac{A^n}{\lambda^n}\right) \longrightarrow A_\lambda$ (*uniformly*) ガ成立スル。

シカモ $\left\| \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{A}{\lambda} + \dfrac{A^2}{\lambda^2} + \cdots\cdots + \dfrac{A^n}{\lambda^n}\right) - A_\lambda \right\| \leqq \dfrac{M}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$

ナル如キ M ガ存在スル。

コレラノ結果ハホトンド證明ノ必要ハナイ。定理4ニ於テ A' ガ $|\lambda| \geqq 1-\delta$ ナル固有値ヲモタヌコトカラ $\|A'^n\| \leqq$

$K(1-\delta)^n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ トナッタノハ A' ノ resolvent

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}$ ガ $|\lambda|\geqq 1-\delta$ デ一様收斂スルコトカラ得ラレル。Riesz ノ理論ヨリ A' ガ完全連續ナトキニハ λ ガ A' ノ固有値デナケレバ $B=E-\frac{A'}{\lambda}$ ガ inverse ヲモテコレガ λ ニ關シテ正則トナルカラデアル。(南雲氏ノ論文: Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, Jap. Journal of Math., XIII, 1936 參照)

定理3及ビ定理4ニテハ收斂ハ何レモ强收斂デアッタガ、コレラガ定理5ニテスベテ一様收斂(uniform convergence)ニヨッテオキカヘラレタノハ注目ニ値スル。

次ニ Kryloff-Bogolioubofff ノ與ヘタ結果ヲ一般ノ complex Banach 空間ヘ擴張スル。Kryloff-Bogolioubofff ハ $\|A^n\|\leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ガ成立スルトキ A ガ完全連續デアルトイフ代リニ $\|A^k-V\|=\alpha<1$ トナル如キ integer $k\geqq 1$ 及ビ完全連續ナ linear operator V ガ存在スルコトヲ假定シテ

$$\left\|\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}-A_\infty\right\|\leqq\frac{M}{n},\quad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

ナル如キ linear operator A_∞ 及ビ定數 M ガ存在スルコトヲ示シテヰル。コレヲ証明スルニハ先ヅ $k=1$ ナルトキヲ証明スレバ十分デアル。何トナレバ若シ $k=1$ ノトキ

ニ定理ガ証明サレレバ

$$\left\| \frac{A^{k}+A^{2k}+\cdots\cdots+A^{mk}}{m} - A_\infty \right\| \leqq \frac{M}{n}, \quad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

トナル如キ A_∞, M ガ存在スルカラ, コレヨリ任意ノ n ニ對シテ

$$\left\| \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n} - A'_\infty \right\| \leqq \frac{M'}{n}, \quad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

トナル如キ A'_∞, M' ガ存在スルコトガ容易ニ出セルノデアル。即チ, $(m+1)k \leqq n < (m+2)k$ トナル如キ m ヲトレバ

$$A+A^2+\cdots\cdots+A^n=(A+A^2+\cdots\cdots+A^k)+(A+A^2+\cdots\cdots+A^k)(A^k+A^{2k}+\cdots\cdots+A^{mk})$$
$$+(A^{(m+1)k+1}+A^{(m+1)k+2}+\cdots\cdots+A^n)$$

デアルカラ

$$\left\| \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n} - \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^k}{k}\cdot A_\infty \right\| \leqq \left\| \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^k}{n} \right\|$$
$$+\left\| \frac{(A+A^2+\cdots\cdots+A^k)(A^k+A^{2k}+\cdots\cdots+A^{mk})}{n} - \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^k}{k}A_\infty \right\|$$
$$+\left\| \frac{A^{(m+1)k+1}+A^{(m+1)k+2}+\cdots\cdots+A^n}{n} \right\|$$
$$\leqq \frac{k}{n}C+\left\| \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^k}{k} \right\| \cdot \left\| \frac{A^k+A^{2k}+\cdots\cdots+A^{mk}}{m}\cdot\frac{mk}{n} - A_\infty \right\| + \frac{k}{n}C$$
$$\leqq \frac{k}{n}C+C\cdot\left[\left\| \frac{A^k+A^{2k}+\cdots\cdots+A^{mk}}{m}\,\frac{mk}{n} - \frac{mk}{n}A_\infty \right\| + \left(1-\frac{mk}{n}\right)\|A_\infty\| \right]$$
$$+\frac{k}{n}C$$
$$\leqq \frac{k}{n}\cdot C+C\cdot\frac{mk}{n}\cdot\frac{M}{m}+\frac{2k}{n}\|A_\infty\|+\frac{k}{n}C.$$

$\|A_\infty\| \leqq C$ デアルカラ

$$\left\| \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n} - \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^K}{k}\cdot A_\infty \right\| \leqq \frac{kC}{n}(4+M) \equiv \frac{M'}{n}$$

即チ $A'_\infty = \dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^K}{k} A_\infty$, $M' = K\cdot C\cdot(4+M)$ ト

オケバヨイ。*

次ニ Kryloff - Bogoliouboff ノ結果ヲ $k=1$ ノ場合ニ証明スル。

定理6. E ヲ Complex Banach 空間, A ヲ E ヲ E ノ中ヘ寫像スル linear operator デ $\|A^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ C ガ存在スルモノトスル。今若シ $\|A-V\| = \alpha < 1$ ナル如キ完全連續ナ linear operator V ガ存在スレバ完全連續ナ linear operator A_1 ガ存在シテ,

$$\left\| \frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n} - A_1 \right\| \leqq \frac{M}{n}, \quad n=1,2,\cdots\cdots$$

トナル。コヽニ M ハ常數デアル。A_1 ハ定理1ニ於ケル條件 (i), (ii), (iii) ヲ滿足スル。且ツ任意ノ $|\lambda|=1$ ナル complex number λ ニ對シテ

$$\left\| \frac{1}{n}\left(\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{\lambda^n}\right) \rightarrow A_\lambda \right\| \leqq \frac{M}{n}, \quad n=1,2,\cdots$$

---

* コノ計算ハ $\dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}$ 及ビ $\dfrac{A^K+A^{2K}+\cdots\cdots+A^{nK}}{m}$ ノ收斂ヲ考ヘタノデ面倒トナツタノデ、コノ代リニ $\dfrac{E+A+\cdots\cdots+A^{n-1}}{n}$ 及ビ $\dfrac{E+A^K+\cdots\cdots+A^{(m-1)K}}{m}$ ノ收斂ヲ考ヘレバ計算ハ簡單ニナル。

トナル。コヽニ A_λ ハ完全連続ナ *linear operator* デ定理2ニ於ケル條件(i)—(Nii) ヲ満足スル。又絶對値1ナル A ノ固有値ハ有限個シカナクコレヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_p$ トスレバ

$$A' = A - (\lambda_1 A_{\lambda_1} + \lambda_2 A_{\lambda_2} + \cdots\cdots + \lambda_p A_{\lambda_p})$$

ハ又 A ト同ジ性質ヲモツ *linear operator* デ(即チ $\|A'\|^n \leqq C'$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ナル如キ C' ト $\|A' - V'\| = \alpha < 1$ ナル如キ完全連続ナ *linear operator* V' ガ存在スル)且ツ A' ハ十分小サイ $\delta > 0$ ニ対シテ $|\lambda| \geqq 1 - \delta$ ナル固有値ヲモタズ $\|A'^n\| \leqq K(1-\delta)^n$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ナル如キ常数 $K, \delta > 0$ ガ存在スル。ヨッテ一般ニ

$$A^n = \lambda_1^n A_{\lambda_1} + \lambda_2^n A_{\lambda_2} + \cdots\cdots + \lambda_p^n A_{\lambda_p} + A'^n$$

$$\|A'^n\| \leqq K(1-\delta)^n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル。即チ定理3, 4, 5ニ於ケル結果ガスベテ(A' ガ完全連続ニナルト云フコトヲ除キ)成立スル。

証明: 先ヅ $\left\{\dfrac{A + A^2 + \cdots\cdots + A^n}{n}\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ A_1 ニ強収斂スルコトヲ示スタメニ, 任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $\left\{\dfrac{Ax + A^2x + \cdots\cdots + A^nx}{n}\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ *totally bounded* デアルコトヲ証明スル。

$V_p \equiv A^p - (A - V)^p$ ナル *linear operator* V_p ヲ考ヘレバ, コレハ完全連続デアル。何トナレバ右辺ヲ展開スレバ A^p ノ項ハ消エテ少クトモ一ツ V ヲ含ム項ノミガ残ルカラ, ヨッテ $n > p$ ニ對シテ

$$\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}=\frac{A+A^2+\cdots+A^p}{n}+\left\{(A-\nabla)^p+\nabla_p\right\}\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-p}}{n},$$

$$(8)\quad \left\|\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}-\nabla_p\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-p}}{n}\right\|\leqq\left\|\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^p}{n}\right\|$$

$$+\left\|(A-\nabla)^p\cdot\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-p}}{n}\right\|\leqq\frac{p}{n}C+\alpha^p\cdot\frac{n-p}{n}C$$

$$\leqq\frac{p}{n}C+\alpha^p\cdot C$$

トナル。故ニ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\alpha^p\cdot C\cdot\|x\|<\frac{\varepsilon}{3}$ ナル如クpヲトリ、更ニ $\frac{p}{n}C\|x\|<\frac{\varepsilon}{3}$ ナル如キ n ヲ考ヘレバ

$$\left\|\frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx}{n}-\nabla_p\frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n-p}x}{n}\right\|<\frac{2}{3}\varepsilon$$

トナリ、且ツ $\left\{\nabla_p\frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n-p}x}{n}\right\}$ ($\frac{p}{n}C\|x\|<\frac{\varepsilon}{3}$ or $n>\frac{3p}{\varepsilon}C\cdot\|x\|$) ハ ∇_p ガ完全連続デ

$$\left\|\frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n-p}x}{n}\right\|\leqq\frac{n-p}{n}C\|x\|\leqq C\cdot\|x\|$$ ナル

故 *totally bounded*, シタガッテ直徑 $\frac{\varepsilon}{3}$ ヲ超ヘナイ有限個ノ部分ニ分レルカラ $\left\{\frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx}{n}\right\}$ ($n>\frac{3p}{\varepsilon}\cdot C\|x\|$) ハ直徑 ε ヲ超ヘナイ有限個ノ部分ニ分レル。

$n\leqq\frac{3p}{\varepsilon}C\|x\|$ ナル n ハ有限個デアリ、且ツ ε ハ任意デアッタカラ結局 $\left\{\frac{Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx}{n}\right\}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) ハ *totally bounded* デアル。

コノコトヨリ $\frac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}\longrightarrow A_1$ (*strongly*) ハ定理1(又ハ3)ト同ジ方法ニシテ証明サレル。A_1 ガ完全連続ニナルコトハ(8)式ヨリ殆ド明カデアラウ。

$|\lambda|=1$ ナル complex number λ ニ對シテ

$\frac{1}{n}\left(\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+\cdots\cdots+\frac{A^n}{\lambda^n}\right)\to A_\lambda$ (strongly) トナル

コト及ビ A_λ ニ関スル定理２ノ性質 (i)―(vii) モ全ク同様ニ証明スルコトガ出來ル。吉田氏ニヨツテ証明サレタ如ク $\|A-\nabla\|=\alpha<1$ ナル完全連続ナ linear operator ∇ ガ存在スレバ十分小サイ $\delta>0$ ニ対シテ A ノ $1-\delta\leqq|\lambda|<1$ ナル固有値 λ ハ存在セズ、且ツ絶對値１ノ A ノ固有値ハ有限個シカナイカラ コレラヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_p$ トスレバ

$$A'=A-(\lambda_1 A_{\lambda_1}+\lambda_2 A_{\lambda_2}+\cdots\cdots+\lambda_p A_{\lambda_p})$$

ハ求ムル A' デアル。

$$\nabla'=\nabla-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i A_{\lambda_i}$$

トオケバ

$$\|A'-\nabla'\|=\|A-\nabla\|=\alpha<1$$

トナリ A' ハ $|\lambda|\geqq1-\delta$ ナル固有値ヲ持タナイ。

Riesz ノ方法ト全ク同様ニシテ $\|A'-\nabla'\|=\alpha<1$ ナル完全連続ナ linear operator ガ存在スルトキハ十分小サイ $\delta>0$ ニ對シテ $|\lambda|\geqq1-\delta$ ナル λ ヲ考ヘレバ λ ガ A' ノ固有値デナケレバ $E-\frac{A'}{\lambda}$ ハ inverse ヲモツコトガ証明出來ルカラ* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A'^n}{\lambda^n}$ ハ $|\lambda|\geqq1-\delta$ ニテ一樣收斂スル。ヨツテ $\|A'^n\|\leqq K(1-\delta')^n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナル K ガ存在スル。

---

* 次頁へ

其ノ他ノコトハスベテ殆ンド定理3, 4, 5ト同様ニ証明出来ル。コノ場合モハジメハ収斂ハ弱収斂デアッタガアトデ

$$A = \lambda_1 A_{\lambda_1} + \lambda_2 A_{\lambda_2} + \cdots\cdots + \lambda_p A_{\lambda_p} + A'$$

ナル分解ヲシテカラ、スベテノ収斂ヲ uniform convergence デオキカヘ得ルコトハ面白イト思フ。

※ operator $B \equiv E - \dfrac{A'}{\lambda}$ ハ $x \neq 0$ ヲ 0 ニ移サナイカラ Schlicht デアル。

若シコレガ Banach space ノ one-to-one ノ写像ヲ與ヘナケレバ $B, B^2, B^3, \cdots\cdots$ ニヨリ Bild ハ順序前ノモノノ subspace ニナル。コレガ矛盾ニナルコトハ容易ニ云ヘル。コレラノ事実ハ resolvent ノ考ヘヲ使ヘバ容易ニ示サレル。吉田氏ノ本号ノ論説参照。