710 ~~679~~. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用, III (*Banach*空間ヘノ*Fréchet*定理ノ擴張)

吉田　耕作（阪大）

先ヅ前談話ノ誤謬訂正.

p. 284. 第14行目: Eヲ一次独立, ノ次ニ「且ツ $\int \psi_1(x)\,dx = \int \psi_2(x)\,dx = 1$」ヲ補フ。

p. 285. 第2行目: シタトスレバ, ノ次ニ「正常数デ除シテ $\int \rho_1(x)\,dx = \int \rho_2(x)\,dx = \int \psi(x)\,dx = 1$ ト假定シテヲケバ」ヲ補フ。

p. 285. 第5行目:

$$\tilde{\rho}_2'(x) = \{|\rho_1(x)-\psi(x)|+\psi(x)-\rho_1(x)\}\Big/\int\{|\rho_1(x)-\psi(x)|+\psi(x)-\rho_1(x)\}\,dx$$

ト改ム。

p. 288. 第3行目: operator ハ, ノ次ニ「適當ナ條件ノ下ニ」ヲ補フ。

p. 288. 第7行目: Lemma 1 ノ内容ヲ「vollstetig ナ K ノ固有値ハ複素数平面上原点以外ニ集積シナイ」ト改ム。

p. 299. 第3行目: $\delta > 0$ デ, ノ次ヘ「0ヲ」ヲ, 固有値ノ次ニ「$=$」ヲ補フ。

p. 295. 第11行目: ノト, ノ次ニ「根本ノ考ヘハ」ヲ補フ。

前談話ニ於テハ，丁度 C. Visser ノ論文ヲ讀ンダ許リダッタノデ Hilbert 空間ヲ離レラレナカッタ。併シ其ノ後反省シテミタラ F. Riesz 及ビ南雲氏ニヨッテ「積分方程式ノ抽象化」が相當ナ程度ニ出來テヲルノデ，§4ノ定理(前談話)ヲ complex Banach 空間ヘ拡張スルコトハ容易ナコトが直グワカッタ。ソコデ之レヲ書カウトシタノデアルが，念ノタメニ Zentralblatt ヲヒックリカヘシテ文献ヲ漁リ N. Kryloff ト N. Bogolioubboff ノ論文(C. R. 204 (1937), p. 1386–1388) ノ存在ヲ知ッタ。ソコデ此ノ論文(証明ハ書イテナイ)ノ結果ヲモ含ムヤウナ Fréchet 定理ノ一拡張が得ラレナイカト考ヘテミタ。ソウシタラ後述ノ如キ相當一般ナ定理が得ラレルコトがワカッタ。此ノ間ニ角谷靜夫氏ノ倦マザル御助力ヲ受ケタコトヲ厚ク感謝スル。尚角谷氏ハ前談話ノ Visser 定理ノ C. Banach 空間ヘ鮮ヤカニ拡張セラレ，又筆者ノ得タ Lemma 7, 9 [1] (後述)ヲ用ヒテ定理ノ別証明ヲ與ヘラレタ。(本誌ノ同氏談話参照)

§6. Fréchet 定理ノ Complex Banach 空間ヘノ一擴張

定理. T ヲ C. Banach 空間 $\mathfrak{B}$ ノ線型 operator トシ，且ツ次ノ二條件ヲ満足スルモノトスル。(i) 全テノ

---

(1) 其特別ナ場合丈デ充分.

n = 對シ $\|T^n\| \leqq M$ ナル如キ常數Mガ存在スル。(ii) 適當ニ vollstetig ナ線型 operator ∇ ヲトレバ $\|T-\nabla\| < 1$。然ラバ T ノ絶對値1ノ固有値ハ有限コシカナリ，之等ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k$ トスレバ

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i + S ;$$

ココニ T_i ハ全テ vollstetig ニシテ且ツ

$$T_i^2 = T_i, \quad T_i T_j = T_j T_i = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j,$$

$$T_i S = S T_i = 0.$$

及ビ全テノ m ニ對シ $\|S^m\| \leq \dfrac{C}{(1+\varepsilon)^m}$ ナル如キ正常數 C, ε ガ存在スル。

上定理カラ直チニ

系1. T^m ガ $m \to \infty$ ノトキ一様收斂スルタメノ必充條件ハTガ1以外ニ絶対値1ノ固有値ヲモタヌコトデアル。

系2. $\left\| \dfrac{T+T^2+\cdots\cdots+T^n}{n} - T_\infty \right\| \leq \dfrac{D}{n} \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$

ナル如キ vollstetig ナ T_∞ 及ビ常數 C ガ存在スル。ココニ $T_\infty = T_i$ or 0 as $\lambda_i = 1$ or all $\lambda_j \neq 1$.（系1ノ收斂ノ場合モ $\|T^n - T_\infty\| \leqq \dfrac{D}{n}$）.

系3. 假定(ii)ノ代リニ(ii)′「或ル k ニ対シテ適當ニ vollstetig ナ ∇ ヲ撰ベバ $\|T^k - \nabla\| < 1$」ヲ假定スルト

$$\left\| \frac{T+T^2+\cdots+T^n}{n} - T'_\infty \right\| \leqq \frac{D}{n} \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ナル如キ vollstetig ナ T'_∞ 及ビ常數 D' ガ存在スル。

此ノ系3ハ上述 N. Kryloff ト N. Bogoliouboff ガ証明ナシニ與ヘタ結果ノ C. Banach 空間ヘノ拡張デアル。

注意. 之デ Fréchet 定理ノ抽象化トシテハ先ヅ満足デキル様デアリマスガ, Fréchet ノ如ク有界デ可測ナ核 $K(x, y)$ ニヨル integral operator ハ L_1 空間デ必ズシモ vollstetig デナイ(之疑問ヲ三村氏及ビ角谷氏ニオ訊ネシタ所角谷氏ハ実際例ヲ作ッテ之レヲ示シテ下サッタ)カラ, Fréchet ノ定理ガ完全ニ抽象化サレタ訳デハアリマセン。

此所ニ「F. Riesz ニヨル積分方程式ノ抽象化」ト「古典的ナ或ハ具体的ナ積分方程式論」トノ間ニ gap ガアル様デス。ソレカラ, Fréchet ノ核 $K(x, y)$ ハ確率論的ナ假定 $K(x, y) \geqq 0$, $\int K(x, y)\,dy \equiv 1$ ヲ満足スルタメニ, 其ノ絶対値1ノ固有値ハ全テ $\lambda^N = 1$ (N 整数 $\geqq 1$) ノ如キ條件ヲ満足トルコトガワカッテル(前々談話 p. 247) ノデアルガ, 我々ノ一般ナ場合ニハ之種ノコトハ何モ云ヘナイ。ソコデ positive linear operator トデモ云フベキモノヲ調ベルコトガ問題ニナルノデスガ, 今ノ所文献ヲ漁ッテ

E. Hopf: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern (Sitz. Berichte Berlin (1928), p. 233)

M. A. Rutmann: Sur une classe spécielle d'opérateurs linéaires totalement continus (C. R. URSS, 18, 9 (1938), p. 625)

ヲ見ツケタニ過ギマセン。識者ノ御教示ヲ仰グ次第デス。

§7. 定理ノ証明

<u>*Lemma 7.*</u> Tガ(ii)ヲ満足スレバ（(i)ヲ假定スル必要ナシ），Tノ固有値ハ単位円ノ内部ノ点ニシカ集積シナイ。

証。$T x_i = \lambda_i x_i$，$\lambda_i \neq \lambda_j$，$x_i \in \mathfrak{L}$，$x_i \neq 0$，$\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$，$|\lambda| \geqq 1$ カラ矛盾ヲ出ストヨイ。$T^n = \{T^n - (T-\nabla)^n\} + (T-\nabla)^n$ デアルガ，右辺第一項ハ其 *factor* ニ少クトモ一ツ *vollstetig* ナ∇ヲ含ム如キ *term* ノ和ダカラ *vollstetig*。且ツ $\|T-\nabla\| = \delta < 1$ トスルト $\|(T-\nabla)^n\| \leqq \delta^n$，$T^n x_i = \lambda_i^n x_i$ ダカラ，結局次ノ假定カラ矛盾ヲ出スト ヨイ。

$T = \nabla + \Delta$，∇ *vollstetig* 且 $\|\Delta\| = \delta < \frac{1}{4}$。$\lambda_i \neq \lambda_j$，$\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \lambda$，$\|\lambda\| \geqq 1$，$T x_i = \lambda_i x_i$，$x_i \in \mathfrak{L}$，$x_i \neq 0$。

以下 *F. Riesz* ノ考ヘ[1]ヲ *modify* シテ矛盾ヲ出ス。先ヅ任意ノ n ニ對シテ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ハ一次独立。証明ハ *induction* ニヨル。即チ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ ヲ一次独

---

(1) *S. Banach: Théorie des Operations linéaires*, p. 160. 尚上ノ *Lemma* ガ *F. Riesz* ノ定理ノ拡張ニナッテルコトハ明カデス。

立トスレバ x_n ハ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ ト一次独立。何者

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \text{ トスレバ } Tx_n = \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \alpha_i x_i,$$

$$Tx_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i x_i \text{ ニヨリ } \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \alpha_i x_i = 0 \text{ ヲ得}$$

ルガ，α 全テハ 0 ナラズ又 $\lambda_i \neq \lambda_j$ カラ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ ガ一次関聯トナッテ了フカラ。

故ニ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ ノ張ル線型空間ヲ $\mathcal{E}_{n-1}$ トスルト $\mathcal{E}_{n-1}$ ハ $\mathcal{E}_n$ ノ純部分空間トナル。F. Riesz ニヨリ，(1)

$y_i \in \mathcal{E}_i$，$\|y_i\| =$，且ツ $\|y_i - x\| > \frac{1}{2}$ for all $x \in \mathcal{E}_{i-1}$ ナル如キ点列 $\{y_i\}$ ガ存在スル。

次ニ $(\lambda_n x - T\cdot x) \in \mathcal{E}_{n-1}$ for all $x \in \mathcal{E}_n$ デアル。何者，

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \text{ トスルト } \lambda_n x - T\cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \alpha_i x_i$$

トナルカラ。

故ニ $T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) = y_n - \left\{ y_n - T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) + T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\}$ ノ

右辺第二項ハ $m < n$ ノトキ $\mathcal{E}_{n-1}$ ニ属ス。ヨッテ

$$\left\| T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| > \frac{1}{2} \text{ for } m < n.$$

従ッテ $\delta < \frac{1}{4}$，$T = \nabla + \Delta$，$\|\Delta\| = \delta$ ニヨリ

$$\left\| \nabla\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - \nabla\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| + \frac{1}{4} \left\| \frac{y_n}{\lambda_n} - \frac{y_m}{\lambda_m} \right\| > \frac{1}{2} \text{ for } m < n$$

---

(1) Banach: loc. cit. p. 153

所ガ $\| y_i \| = 1$, $\lambda_n \to \lambda$, $|\lambda| \geq 1$ 且ツ ∇ vollstetig =

ヨリ適當ニ部分列ヲトリ $\left\| \nabla \left(\frac{y_{n'}}{\lambda_{n'}} - \frac{y_{m'}}{\lambda_{m'}} \right) \right\| \to 0$,

$\left\| \frac{y_{n'}}{\lambda_{n'}} - \frac{y_{m'}}{\lambda_{m'}} \right\| \leq 2$ for $n', m' \to \infty$. 從ツテ $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

ナル矛盾ヲ得ルコトニナル。 —— 以上 ——

<u>Lemma 8.</u> λ平面ノ領域 $\mathfrak{D}$ デ定義サレタ $\nabla(\lambda)$ ガ, λヲ fix スルト $\mathfrak{L}$ ノ vollstetig ナ operator ヲ與ヘ, 且ツλノ函數トシテ $\mathfrak{D}$ デ正則ナリトスル。若シ $(E + \nabla(\lambda)) \cdot x = 0$[1] ガ non trivial ナ解 $x \neq 0$ ヲ許ス如キλノ値ガ $\mathfrak{D}$ ニ於テ孤立集合 $\mathfrak{I}$ ヲナセバ, $\mathfrak{I}$ 以外デ $E + \nabla(\lambda)$ ノ resolvent $(E + K(\lambda)) = (E + \nabla(\lambda))^{-1}$ ガ存在シ, 且ツ $K(\lambda)$ ハ $\mathfrak{I}$ 以外ノ $\lambda \in \mathfrak{D}$ デλノ正則函數トナル。尚之等ノλニ對シ $K(\lambda)$ ハ vollstetig.

證明. 各λニ對シテ $\nabla(\lambda)$ vollstetig ダカラ, F. Riesz ノ定理[2]ニヨリ $\mathfrak{I}$ 以外ノ点 λ_0 デハ $(E + \nabla(\lambda))^{-1}$ ガ<u>有界</u>(連續)ナ operator トシテ unique ニ存在スル。即チ resolvent ガ存在スル。之ガ λ_0 デ正則ナコトハ $|\lambda - \lambda_0|$ ガ充分小サイト

$$\left\{ E + \sum_{n=1}^{\infty} \left(E - (E + \nabla(\lambda_0))^{-1} (E + \nabla(\lambda)) \right)^n \right\} (E + \nabla(\lambda_0))^{-1}$$

ガ絶對且ツ一樣ニ收斂シ $E + \nabla(\lambda)$ ノ inverse ニナルコトガ計算デ試ミルコトカラワカル。

---

(1) E ハ $\mathfrak{L}$ デノ單位 operator

(2) Banach: loc. cit. P. 153

各λニ對シ$K(\lambda)$ノ *vollstetig* ナコトハ

$(E+\nabla(\lambda))(E+K(\lambda))=E$ カラ $K(\lambda)=-\nabla(\lambda)-\nabla(\lambda)K(\lambda)$

ヲ得，$\nabla(\lambda)$ノ *vollstetig* ナコトカラワカル。

<u>*Lemma 9.*</u> $T=\nabla+\Delta$ ガ (ii) ヲ滿足スルトスル。然ラバ *Lemma* 7ニヨリ，Tノ絶対値ノノ固有値ハ有限コシカナク之等ヲ$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k$トスレバ，$1+2\varepsilon > |\lambda| > \frac{1}{1+2\varepsilon}$ナル範囲ニハ$\lambda_i$以外ニ$T$ノ固有値ノナイヤウナ$\varepsilon>0$ガ存在スル。$\varepsilon>0$ヲ充分小サクトルト$(E+\lambda T)^{-1}$ナル$(E+\lambda T)$ノ *resolvent* ガ $1+2\varepsilon>|\lambda|>\frac{1}{1+2\varepsilon}$ ニ於テλノ有理型函數トシテ存在スル（$\frac{-1}{\lambda_i}$ガ *pole* トナリ其以外デハ *regular*）

證明：$\|\Delta\|=\delta<1$ニヨリ$(E+\lambda\Delta)$ノ *resolvent* $(E+\lambda R_\lambda)$ガ $|\lambda|<\frac{1}{\delta}$ ガ存在シ且ツλノ正則函數トナル：

實際 $(E+\lambda R_\lambda)=E+\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda\Delta)^n$.

$$(E+\lambda K_\lambda)(E+\lambda T)=(E+\lambda R_\lambda)(E+\lambda\Delta+\lambda\nabla)$$
$$=E+\lambda(\nabla+\lambda K_\lambda\nabla)$$

デアル。[1] 之レヲ $E+\nabla(\lambda)$ ト置クト，$\nabla(\lambda)$ハ $|\lambda|<\frac{1}{\delta}$ デ正則且ツλヲ *fix* スルト *vollstetig*（∇ *vollstetig* ニヨル）。

---

(1) $(E+\lambda R_\lambda)(E+\lambda T)$ ヲ考ヘルコトハ嘗テ南雲氏ガ具体的ナ積分方程式ノ *resolvent* ガλノ有理型函數トナルコトヲ簡單ニ云フタメニ考ヘラレタコトガアル。本誌 132 号 p. 249 參照。

$(E+\nabla(\lambda))\cdot x=0,\ x\neq 0$ トスルト $(E+\lambda T)\cdot x=0$ デアル。何者，$y=(E+\lambda T)x\neq 0$ トスルト $(E+\lambda R_\lambda)y=0$，$y\neq 0$。之レヨリ $(E+\lambda\Delta)(E+\lambda R_\lambda)y=y=0$ ナル矛盾ヲ得レカラ。

故ニ Lemma 8 ニヨリ，$|\lambda|<\frac{1}{\delta}$ 且ツ $\frac{1}{1+2\varepsilon}<|\lambda|<1+2\varepsilon$ デハ $\frac{-1}{\lambda_i}$ $(i=1,2,\ldots\ldots,k)$ ヲ除キ $(E+\nabla(\lambda))^{-1}$ ガ存在シ且ツ $\frac{-1}{\lambda_i}$ 以外デハ之ハ正則トナル。

$\frac{-1}{\lambda_i}$ ガ $(E+\nabla(\lambda))^{-1}$ ノ pole ナルコトヲ示ス。ソレニハ $(E+\nabla(\lambda))^{-1}=E+K(\lambda)$ トオクト $(E+K(\lambda))(E+\lambda R_\lambda)(E+\lambda T)=E$ ダカラ

$$(E+\lambda T)^{-1}=E+K(\lambda)+\lambda R_\lambda+\lambda K(\lambda)R_\lambda$$

ヲ得ルコトニ注意スル。$\left\{\frac{K(\lambda)}{\lambda}+R_\lambda+K(\lambda)R_\lambda\right\}$ ノ孤立特異点 $\frac{-1}{\lambda_i}$ ニ於ケル Laurent 展開ヲ

$$(*)\quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{C_l}{(\lambda+\frac{1}{\lambda_i})}$$

トスルト，$K(\lambda)$ ガ各 λ ニ對シ vollstetig ナコトト (Lemma 8)，及ビ R_λ ガ $\lambda=\frac{-1}{\lambda_i}$ ニ於テ正則ナコトヨリ，Cauchy ノ積分表示ニヨリ，C_l ガ全テ vollstetig ナコトガワカル。[1]

此所マデ來レバ占メタモノデ，角谷氏ノ論法(本紙76号，談話333)ガ其ノマヽ使ヘテ，上ノ展開(*)ニ於テ負ノ

---

(1) vollstetig ナ operator ト一様收斂ノ limit ハ又 vollstetig.

巾（ベキ）ハ有限ノ所デキレル。即チ $\frac{-1}{\lambda_i}$ ハ $(E+\lambda T)^{-1}$ ノ

pole デアル。　―以上―

注意　上ノ南雲氏ノ議論ノ際ノ結果

$$C_{-1}^2 = C_{-1},\ C_{-1}C_n = C_nC_{-1} = 0 \quad \text{for } n \geq 0$$

ハ矢張リ同ジク得ラレル。

定理ノ証明。　假定 (i) ニヨリ T ハ其ノ絶對値 1 ヨリ大キイ固有値モタヌ。何者 $T\cdot x = \lambda x$, $|\lambda|>1$, $x \in \mathfrak{L}$, $x \neq 0$ トスルト $T^n \cdot x = \lambda^n x$ ヲ得，之レカラ $\|T^n x\| = |\lambda|^n \|x\|$ ナル (i) ニ矛盾スル式ヲ得ルカラ。

故ニ *Lemma* 9 ト組合セテ $(E+\lambda T)^{-1}$ ガ $|\lambda|<1+2\varepsilon$ デハ $\frac{-1}{\lambda_i}$ ナル *pole* ヲ除イテ正則ナル如キ $\varepsilon>0$ ガ存在スル。又 (i) ニヨリ $(E+\lambda T)^{-1} = E + \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda T)^n$ ガ $|\lambda|<1$ デ絶對且ツ一様収斂スル：実際 $|\lambda|<1$ デ $\|(E+\lambda T)^{-1}\| \leq \frac{M}{1-|\lambda|}$.
又コノ式カラ *pole* $\frac{-1}{\lambda_i}$ ガ *simple pole* ナルコトガワカル。

故ニ $(E+\lambda T)^{-1} = (E+\lambda T_\lambda)$ トオキ T_λ ノ $\frac{-1}{\lambda_i}$ ニ於ケル *Laurent* 展開ノ *principal part* ヲ $\frac{T_i}{\lambda+\frac{1}{\lambda_i}}$ トオクト，上ノ注意カラ

$$\begin{cases} T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i + S \\ T_i T_j = 0 \ \text{for } i \neq j,\ T_i^2 = T_i,\ T_i S = S T_i = 0 \end{cases}$$

ナルコトガワカル。

備テ $|\lambda|<1$ デ $T_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(-T)^n$ ダカラ

$$T_\lambda = \sum_{n=1,\, i=1}^{\infty,\, k} \lambda^{n-1} \left\{ (-\lambda_i)^n T_i + (-S)^n \right\} = \sum_{i=1}^{k} (-\lambda_i) \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda\lambda_i)^{n-1} T_i$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (-S)^n = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i T_i}{1+\lambda\lambda_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (-S)^n$$

ヲ得ル。之レカラ $(E+\lambda S)^{-1} = E + S_\lambda$ デ定義サレル

$S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (-S)^n$ ガ $|\lambda| < 1+2\varepsilon$ デ正則ト云フコトガワカル。故ニ Cauchy ノ積分表示ヲ用ヒテ，全テノ n ニ對シ

$$\left\| S^n \right\| \le \frac{C}{(1+\varepsilon)^n}$$

ナル常數 C ノ存在スルコトガワカル。 —— 以上 ——

今迄ハ discrete case ノミヲ取扱ッタガ continuous case 即チ所謂 smoluchowsky ノ方程式ハ

$$T(t+s) = T(t)\,T(s), \quad 0 \le t,\, s < \infty$$

ガ角谷氏ノ考ヘヲ使ッテ巧ク取扱ヘルヤウデス。之レハ此ノ次ニユヅリマス。