

御断り

本紙出版ヲ内務省届出等ノ爲メ暫ク停滞
シテ井マシタ。今後ハ少シ方針ヲ変ヘテ
綜合報告ヤ論文紹介ノ様ナモノヲ多ク載
セタイト思ヒマス。附イテハ原稿ノ掲載
ニ制限ヲ加ヘルコトモアリマスカラ御諒
解下サイ。

703

673. *Leray Schauder* ノ不動点存在 定理ノ一應用

南雲 道夫 (阪大)

本紙 134号デ “ $zy = f(x, y, y')$ = 就テ” トシテ
書イタ境界値問題ノ存在定理 (與ヘラレタニ点ヲ通ル積分曲
線ノ存在 = ツイテ) ハ “*Leray Schauder* ノ不動点ノ
存在定理カラ導カレルモノデアアル” トノ御注意ヲ福原氏カラ
受ケタノハ昨年ノ十一月デアッタ。之レハ福原氏ノ手紙ノ終
リ = 只一言ダケ述べラレテアッタノデ、ツヒ迂濶 = 不注意 =
打過シテシマツテ何トモ申譯ナイ次第デアル。寧ハ最近再ビ
氏ノ手紙ヲ見テ氣が付イタノデ之ヲ次ニ述ベヨリ。

一体 *Leray Schauder* ノ定理トハ何カ？

之レ = ツイテハ、スデ = 福原氏が本紙 142号デ *Omotuita*
Mama 区 = 簡單 = 述べラレテアルガ、尚念ノタメ平易 = 説

明ヲ加ヘヨウ。先ツ次 = 必要ナ概念ノ説明 (略述) カラ
始メヨウ。

§1. (B) 空間ト緊集合ノ説明

□ Banach 空間 ((B) ト略記スル) トハ線型 (一
次結合, 即チ實數 a_i デ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$ が成立) 且ツ Norm
($\|\varphi\|$ デ示ス。之レハ絶対値ノ性質ヲ有スル正又ハ零ノ實數)
ヲ有スル距離空間 ($\|\varphi - \psi\|$ ヲ以テ φ, ψ ノ間ノ距離トス
ル) デアツテ完全性 (Cauchyノ収斂條件成立) ヲ有スル
モノヲ云フ。

例ハ心有限次元ノ Euklid 空間ハ (B) デアル。

又, 閉區間 $a \leq x \leq b$ = 於ケル連続函数 $f(x)$ ノ全体
ヲ (C) ト名付ケ (ソノ各要素 = 各函数ヲ点ト呼ビ, ソノ全
体ヲ空間ト稱スル)

$$\|f(x)\| = \text{Max}_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

= ヲツテ Norm $\|f\|$ ヲ定義スルトキ = ハ (C) ハ (B) ノ
一種トナル。

但シ (C) = 於ケル収斂ハ $f_n(x)$ ノ 一様収斂 ト一致ス
ル。

(C) ハ微分方程式論, 函数方程式論等 = 於テ重要ト應用
ヲ有スル。

□ 緊集合 (kompakte Menge) 有限次元ノ
Euklid 空間デハ有限ト点集合ハ必ず集積点ヲ持ツ。

(Weierstrassノ定理). 然シ一般ノ(B) [特=(C)ノ場合] デハ之ハ成立シナイ。

“今 $\mathcal{M} \subset (B)$ = 於テ, \mathcal{U} ヲ \mathcal{M} ノ任意ノ無限部分集合トスル時, 必ズ \mathcal{U} ノ集積点カ \mathcal{M} ニ存在スレバ, \mathcal{M} ヲ緊集合トヨブ。”

尚 \mathcal{M} ノ閉包 (\mathcal{M} ニソノ集積点ヲ加ヘテ閉集合トセルモノ) $\overline{\mathcal{M}}$ ガ緊集合ナル時ニハ \mathcal{M} ヲ 緩イ緊集合トヨブ (實際ニハ只略シテ緊集合トヨブコトモアル). 之ハ Weierstrassノ定理 (ソノ結論)ガ成立スル集合デアアル。

扱テ特=(C) = 於ケル緊集合 (緩イカ)ノ条件ハ何デアルカ? ソレハ Ascoli-Arzelàノ定理ニヨツテ與ヘラレル。即チ

“ $\mathcal{M} \subset (C)$ ガ (緩イ) 緊集合デアルタメノ必要且ツ充分ノ条件ハ

(1) \mathcal{M} ノスベテノ函数ニツキ同一ノ M デ

$$|f(x)| \leq M \quad (\mathcal{M} \text{ガ有界ノ事ト一致})$$

(2) 任意ノ正数 ε ニ對シ次ノ性質ヲ有スル正数 $\delta(\varepsilon)$ ガ存在スル: \mathcal{M} ノスベテノ函数ニツキ同時ニ

$$|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \text{ナラバ必ズ } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

ガ成立スル (之レヲ \mathcal{M} ガ同程度ニ 連続デアルト呼ブ)。”

特ニ \mathcal{M} ガ有界デ, 同一ノ Lipschitz 常数 L ヲ有スル函数ノ集合 ($|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ ガ成立)ナラバ \mathcal{M} ハ (緩イ) 緊集合デアアル。

③ 尚微分方程式論ニ於テハ開區間 $a < x < b$ 又ハ半

閉区間 $a \leq x < b$ (或ハ $a < x \leq b$) 内ヲ連続ナ函数ノ集合 $\{f(x)\}$ ハ *Montel* ノ正規族 (之ノ任意ノ無限部分集合カラ緩ク一様収斂ヲスル函数列 $f_n(x)^*$ が取出セルモノ) ヲナス者ガ問題トナルコトガ少クナイ。

此ノ場合ニ簡單ナ技巧ニヨツテ $\{f(x)\}$ ハ (B) 空間ノ緊集合 (緩イ) トスルコトが出来ル。

即チ $\{f(x)\}$ ガ正規族トナルコトカラ, $\{f(x)\}$ 全体ニ對シテ

$$|f(x)| \leq M(x)$$

ナル一定ノ連続函数ノ $M(x)$ ノ存在ガ解ル。ソコヲ $N(x)$ ヲバ, $M(x) \leq N(x)$ 且ツ x が a 及ビ b ニ近ツクトキニ $M(x) = 0$ ($N(x)$) ナル様ナ連続函数トシ

$$\|f\| = \text{Max} \left| \frac{f(x)}{N(x)} \right|$$

ニヨリ $\|f\|$ ヲ定義スレバ $\{f(x)\}$ ハ (B) ナ緊集合 (緩イ) トナル。(証明容易)

從ツテ此ノ場合ニ *Norm* ノナイ或ハ距離ノナイ空間ノドノ様ナ高度ノ抽象論ヲ用ヒナクトモ問題ニ合フノデアアル。

應用上ノ問題ガハ $M(x)$ ナル函数ハイヤカジメ容易ニ得ラレル。又独立変數ノ領域ガ任意ノ次元デアツテモ同様デアアル。

* 問題ノ区間内ノ任意ノ閉区間ヲ $f_n(x)$ ガ一様ニ収斂スルコト。

又 $a = -\infty$, $b = +\infty$ ガモ支障ナイ。

實際應用上ノ問題ハ只(C)ノ代リニ適當ナ Norm
ヲ用フルコトハ有益ダト思フ。

§2 Leray Schauderノ定理ノ説明

① 微分方程式ノ境界値問題ハ多ク(B)空間ニ於ケル

$$(1) \quad \varphi = \mathcal{F}(\varphi)$$

ナル形式ノ函数方程式ヲ解リコトニ帰着サレル(次節参照)
但シ茲ニ $\mathcal{F}(\varphi)$ ハ過連続(Vollstetig)ナ運算ナル。

過連続ナ運算 $\mathcal{F}(\varphi)$ トハ、 φ = 閉シテ連続ナルノミナ
ラズ、 φ ノ有界集合ヲ \mathcal{M} トスル時、 $\mathcal{F}(\varphi)$ ガ緊集合(緩イ)
トナルモノヲ云フノナル。例ヘバ(C)ニ於テ

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_a^x f(t) dt$$

トスレバ $\mathcal{F}(f)$ ハ過連続トナル。又

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

[$K(x, t)$ ハ $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ ニ連続ナ一定ノ函数
ナル]モ(C)ニ於ケル過連続ナ運算ナル。

尚(1)ナル式ハ \mathcal{F} ナル運算ニヨリ(B)ノ点ヲバ(B)内
ニ寫像スル時ソノ前後ニ於テ一致スル点 φ ノ存在スル事ヲ
示シテホル。カクノ如ク寫像ノ前後ニ於テ一致スル点ヲソノ
寫像ノ不動点(Fixpunkt)ト云フノナル。

② 次ニ Leray Schauderノ定理(結果)ヲ述べ

ル。(先づ平易な爲メ=特別な場合ヲ述ベル)

此ノ定理ノ内容ハ連続性ノ原理トアモ名付ケタヲヨイカト思ハレル性質ノモノデアル。即チ(1)ナル方程式=對シテ更ニハ λ ヲ含ム一 λ ヲ含ム方程式($0 \leq \lambda \leq 1$)

$$(2) \quad \varphi = \mathcal{F}(\varphi; \lambda)$$

ヲ考フル。且シ $\mathcal{F}(\varphi; \lambda)$ ハ $\lambda = 0$ デ $\mathcal{F}(\varphi; 0) = 0$ トナリ, $\lambda = 1$ デ $\mathcal{F}(\varphi; 1) = \mathcal{F}(\varphi)$ トナル。

[例ハ $\mathcal{F}(\varphi; \lambda) = \lambda \mathcal{F}(\varphi)$]. $\lambda = 0$ ノ時解ノ存在($\varphi = 0$)ハ明ラカデアレガ,適当な条件ノ下ニ λ ガ1マデ連続的ニ変化スル時,尚或ル範囲内ニ於ケルソノ解ノ存在ヲ示スデアル。即チ

“ **定理**

(i) Ω ハ(B)内ノ有界ノ開領域, ω ヲソノ境界トスル。

(ii) $\mathcal{F}(\varphi; \lambda)$ ハ $\varphi \in \bar{\Omega}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ デ λ ニツキ一様連続デアル。 [$\bar{\Omega} = \Omega + \omega$]

(iii) $\mathcal{F}(\varphi; \lambda)$ ハ $\varphi \in \bar{\Omega}$ デ過連続デアル。

(iv) $0 \in \Omega$, $\mathcal{F}(\varphi; 0) = 0$, $\mathcal{F}(\varphi; 1) = \mathcal{F}(\varphi)$

(v) $0 \leq \lambda < 1$ デ Ω ノ境界, ω ハ $\mathcal{F}(\varphi; \lambda)$ ノ不動点 [(λ)ノ解]ヲ含マナイ。

以上ノ假定ガ成立スルトキハ, $\mathcal{F}(\varphi)$ ノ不動点 [(1)ノ解]ガ Ω ノ内ニ存在スル。”

(註) (ii), (iii), (iv)ハ $\mathcal{F}(\varphi; \lambda) = \lambda \mathcal{F}(\varphi)$ ナル場合ニ満サレテ

キル。(v)ハ最モ意味ノ深い条件デアル。 $0 \in \Omega$ 及ビ

$\mathcal{F}(\varphi; 0) = 0$ ナル条件ハ,ヨリ一般的ナ条件, $0 \in \Omega$ 及ビ

$f(\varphi; 0) = \alpha [\alpha \text{ハ } (B) \text{ノ定数}] \neq \text{置キカヘラレ}$ ル。

[3] 上述ノ *Leray Schauder*ノ定理ハ 寫像ノ度数 (*degré topologique, Abbildungsgrad*)ノ理論ノ上ニ成立スルモノナル。之レハ *Brouwer*ガ有限次元ノ寫像論ニ於テ始メテ寫像度数ノ考ヘヲバ、 (B) 空間内ニテノ寫像 $\varphi \xrightarrow{\Phi} \varphi'$

$$\varphi' = \Phi(\varphi) = \varphi - f(\varphi)$$

[$f(\varphi)$ ハ過連続]ニマテ拡張シテモノナル。即チ一定点 α ガ $\Phi = \text{ヨリ}$ Ω ノ像ヲ放ハレル度数 (正負ノ符号ヲ有スル整数)トニ言フベキモノヲ Φ, Ω, α ニ對スル寫像度数トヨビ、 $d(\Phi, \Omega, \alpha)$ ニ之レヲ示ス。

$d(\Phi, \Omega, \alpha)$ ノ基本的一性質ハ

0° $d(\Phi, \Omega, \alpha)$ ハ (正負又ハ零ノ) 有理整数ナル。但シ α ハ $\omega(\Omega)$ ノ境界ノ像 $\Phi(\omega) = \varphi \neq \alpha$ ニトスル。

1° $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3, \Omega_1 \cdot \Omega_2 = 0$ ナル時、
 $d(\Phi, \Omega_3, \alpha) = d(\Phi, \Omega_1, \alpha) + d(\Phi, \Omega_2, \alpha)$ 。

2° $d(\Phi, \Omega, \alpha) \neq 0$ ナラバ必ず $\alpha \in \Omega$ 。

3° Φ, Ω 及ビ α ガ連続的 (一樣連続的)ニ変化する時、途中テ決シテ $\alpha \in \Phi(\omega)$ トナラナケレバ、

$d(\Phi, \Omega, \alpha)$ ハ不変ナル。

4° $\Phi(\varphi) = \varphi [f(\varphi) = 0]$ ト一致且ツ $\alpha \in \Omega$ ナル時ニハ、

$$d(\Phi, \Omega, \alpha) = 1.$$

以上ノ至(8)ノ基本性質ヲ用フレバ、前述ノ定理ハ直チニ証明カレルヲケテアル。尚 (iv) = 於ケル條件 $0 \in \Omega$ 及ビ $\mathcal{F}(y, 0) = 0$ ノ代リ = ヨリ一般的ニ條件

$$(iv)' \quad d(\bar{\omega}, \Omega, \omega) \neq 0 \quad [\bar{\omega}(x) = y - \mathcal{F}(y, 0)]$$

ガアレバ充分アル。之レガ Leray Schauder ノ主定理アル。(Annales de l'école normale supérieure 1934. 45頁—)

Leray Schauder ハ之レヲ同論文内ヲ精田型偏微分方程式ノ理論ニ應用シテキル。

§3 $y'' = f(x, y, y')$ ノ應用

□ 本紙 134 号ヲ得テ結果ヲ再ビ述ベレバ

“ \mathcal{L} ヲバ $\alpha \leq x \leq \beta$, $\underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x)$ ナル範囲トシ、 $f(x, y, z)$ ハ $(x, y) \in \mathcal{L}$, $-\infty < z < +\infty$ テ連続且ツ

$$(1) \quad \begin{cases} |f(x, y, z)| \leq \varphi(|z|), & [\varphi(u) > 0], \\ \int_0^{\infty} \frac{u \, du}{\varphi(u)} = \infty. \end{cases}$$

次ニ $\underline{\omega}(x)$, $\bar{\omega}(x)$ ハ二回微分可能テ

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{\omega}'' < f(x, \bar{\omega}, \bar{\omega}'), \\ \underline{\omega}'' > f(x, \underline{\omega}, \underline{\omega}'). \end{cases}$$

然ラバ (α, A) , (β, B) ナル二点ヲ通ル

$$y'' = f(x, y, y')$$

ノ積分曲線ガ \mathcal{L} 内ニ存在スル。但シ $\underline{\omega}(\alpha) \leq A \leq \bar{\omega}(\alpha)$,

$$\underline{\omega}(\beta) \leq B \leq \bar{\omega}(\beta)''$$

134号のハ $f(x, y, z)$ のミナラズ $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ の連続性を
 仮定シタ。Leray Schauder の定理ヲ應用スレバ、
 f の連続性カケテモ充分ナル。(前ノ方法ナモ $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$
) 存在ノ假定ヲ除クコトガ出來ルガ一寸面倒ナル)

② 簡單ノタメ $\underline{\omega}(a) < A < \bar{\omega}(a), \underline{\omega}(b) < B < \bar{\omega}(b)$
 ナル場合ノ証明ヲ述ベヨウ。

先ヅ $y = \alpha(x)\eta + \beta(x)$ [$\alpha(x), \beta(x)$ ハ $a \leq x \leq b$
 ナニ回微分可能、且 $\alpha(x) > 0$] ナル変換ニヨリ方程式ガ

$$\eta'' = \phi(x, \eta, \eta')$$

ニ移ツタ時ニモ、上述ノ條件 ($\underline{\omega}, \bar{\omega}$ 上ノ変換ニヨリ変
 換ナレル。又 $|f(\cdot)| \leq \varphi(x)$ ハ φ ト同性質ノ他ノ函数
 $\psi(\eta') = \Theta$ リ、 $|\phi(\cdot)| \leq \psi(\eta')$ ナキカヘラレル) ハス
 ベテ成立スル。

故ニ我々ハ $A = B = 0$

$$\bar{\omega}''(x) < 0, \underline{\omega}''(x) > 0, [\underline{\omega}(x) < 0, \bar{\omega}(x) > 0 \text{ トナル}]$$

ト假定シテモ支障ナシ。

今 (3) $y'' = \lambda f(x, y, y')$

ナル微分方程式ニツキ $y(a) = y(b) = 0$ ナル積分ハ

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) f(t, y(t), y'(t)) dt$$

$$z(x) = \lambda \int_a^b G_x(x, t) f(t, y(t), y'(t)) dt$$

ナル方程式ノ解ト一致スル。即チ $z(t) = y'(t)$,

$$G(x, t) \begin{cases} -\frac{(t-a)(b-x)}{b-a} & (a \leq t \leq x \leq b) \\ -\frac{(b-t)(x-a)}{b-a} & (a \leq x \leq t \leq b) \end{cases}$$

ソコテ

$$y^*(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt$$

$$z^*(x) = \lambda \int_a^b G_z(x, t) f(t, y(t), z(t)) dt$$

トシテ, $(y(x), z(x))$ テ $(y^*(x), z^*(x)) =$ 移入運算 (寫像) テ \mathcal{F}_λ トシ, Norm テ ∞ $\text{Max}(|y(x)|, |z(x)|)$ ニヨツテ定義スレバ \mathcal{F}_λ ハ 連続統 (vollstetig) トナル。

從ツテ問題ハ $(y, z) = \mathcal{F}_\lambda(y, z)$ ナル不動点ノ存在ニアル。

[3] 條件 (1) ニヨリ, 方程式 (3) ノ解ヲ $(0 \leq \lambda \leq 1$ トス) $y(a) = y(b) = 0$, $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$ ナル $\epsilon / 2$ ニツイテハ必ズ

$$|y'(x)| < M$$

ナルヤツチ M ノ存在ガ証明出來ル。

ソコテ $y(x), z(x)$ テバ $a \leq x \leq b$ = 於テ夫々 $\underline{\omega}(x) < y(x) < \bar{\omega}(x)$, $|z(x)| < M$ ナル様ニ任意ノ連続函数トシ, カルル函数ノ組 (y, z) ノ全体ヲ \mathcal{B} トスル。シカラバ前述ノ Norm ノ意味テ \mathcal{B} ハ有界ノ閉集合トナル。

又 Ω の開被 $\bar{\Omega}$ は $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$, $|z(x)| \leq M$ なる M 上の連続関数の組 (y, z) の全体ト一致スル。

従って Ω の境界 $\omega =$ 属スル (y, z) トハ,
 $a \leq x \leq b =$ 於テ, $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$, $|z(x)| \leq M$ ナ,
 且ツ上ノ内イツレカーツノ等号が成立スル様ナ x ノ値ガ
 $a \leq x \leq b =$ 存在スル ϵ ノデアル。

取テ \mathcal{F}_λ ハ $\bar{\Omega}$ デ連続ナ, $\lambda =$ ツキ $\bar{\Omega}$, $0 \leq \lambda \leq 1$
 デ一様連続デアル。又 $(0, 0) \in \bar{\Omega}$, $\mathcal{F}_0(y, z) = (0, 0)$
 デアルカラ, 定理ノ条件 (i), (ii), (iii), (iv) ハスベテ成立
 シテキル。故ニアトハ (v) 即チ $\bar{\Omega}$ ノ境界 ω ガ \mathcal{F}_λ ノ不動
 点ヲ含マヌトヲ示セバヨイ, ($0 \leq \lambda \leq 1$ ノ時)

所ガ \mathcal{F}_λ ノ不動点 (y, z) トハ, $y(a) = y(b) = 0$ ナ
 ル様ナ

$$y'' = \lambda f(x, y, y')$$

$$z = y'$$

ノ解デアル。 $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$ ナル解ニツイテハ
 $\bar{\epsilon} = |z(x)| < M$ デアルカラ, $(y, z) \in \omega$ トナルノハ

$$\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$$

ニ於テドレカーツ等号が成立スル x ノ値 $x = \xi$ ガ存在ス
 ル場合デアル。 $\underline{\omega}(a) < y(a) < \bar{\omega}(a)$, $\underline{\omega}(b) < y(b) < \bar{\omega}(b)$
 ニヨリ, $a < \xi < b$ ナレハナラヌ。

$\underline{\omega}(\xi) = y(\xi)$ ナルトキニハ, $y'(\xi) = \underline{\omega}'(\xi)$, $y''(\xi) \geq$
 $\underline{\omega}''(\xi)$ トナル。又 $\bar{\omega}(\xi) = y(\xi)$ ナルトキニハ, $y'(\xi) = \bar{\omega}'(\xi)$,

$y''(\xi) \leq \bar{\omega}''(\xi) + \nu$. 之レハ $\underline{\omega}''(x) > 0$, $\bar{\omega}''(x) < 0$
 +ルコト ([2]) 交換 = ヨル) 及ビ (2) カラ 生ズル 不等式

$$\bar{\omega}'' < \lambda f(x, \bar{\omega}, \bar{\omega}') \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\underline{\omega}'' > \lambda f(x, \underline{\omega}, \underline{\omega}')$$

ト矛盾スル。故ニ (V) ナル 条件ガ 証明サレタ。

[4] 大体上ノ 様ヲ 考ヘ方 デヤレバ (1) ナル 条件ハ モット
 一般的 ナレバ ノ デ置キ 換ヘラレルコトニ 証明出来ルガ、ソレハ
 又、機会ニ 譲レコトニ シヨウ。又 (2) ノ 条件ニ 於テ 等号ガ ア
 ツテモ 支障 ナイコトニ 容易ニ 解ル。