701

~~671.~~ 円, 球ノ幾何ニツイテ

松村　宗治（台北大）

イツモノ記法ヲ用ヒテ円ヤ球ノ幾何ニツイテノベヨウト思フ。

(I) x ト y トヲ R_2 内ノ円トシ

$$(1)\quad z = x + iy, \qquad i = \sqrt{-1}$$

ヲ考ヘル。

此ノトキ z ガ点ヲ表ハスタメニハ x ト y トガ垂直ニナラネバナラヌコトガ容易ニ分ル。サテ γ ナル円ガ x ト y トニ切スルナラバ

$$(z\gamma) = 1 + i$$

トナリ

$$\cos\varphi = 1 + i$$

トナル、ココニ φ ハ円 z ト円 γ トノ間ノ角デアル。

以上 (1) ニテ i ノ代リ duale Zahlen ε ヲ用ヒ（此時 $\varepsilon^2 = 0$）ノ場合ニモ此レニ類スル問題ハ容易ニ考ヘラル。

次ニ ξ 円ニ関スル $x + iy$ 円ノ反轉円ヲ $\bar{x} + i\bar{y}$ トセバ, x ノ反轉円ガ $\bar{x}$ デアリ y ノ反轉円ガ $\bar{y}$ ナルコトモ

容易ニ分ル。

コヽニ ξ, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ デトモニ実円ヲアラハスモノトスル。

(II) R_2 ニ於ケル二ツノ円 $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ノ切点 $\mathfrak{p}$ ハ

$$(1)\quad \mathfrak{p} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{y}, \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 = 1$$

デ與ヘラレル。

サテ今

$$(2)\quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + (\mathfrak{x}\mathfrak{y})\mathfrak{y}, \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 = 1$$

ヲ考ヘルトキハ

$$(\mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 2, \qquad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) \pm 2$$

$$(3)\quad (\mathfrak{p}\,\mathfrak{z}) = 0$$

ガ成立スルコトガ分ルカラ $\mathfrak{z}$ ハ円デアッテ $\mathfrak{p}$ ヲ通過シ $\mathfrak{x}$ 及ビ $\mathfrak{y}$ ト等角ヲナスコトニナル。(3)式ノ右辺ノ2ハ円ノ式ヲ normiert スルコトニヨリテコレヲ1トスルコトガ出来ル、ソレ故ニ $\mathfrak{p}$ ニ於テ $\mathfrak{x}$ ト $\mathfrak{z}$ ガ相切ス、マタ $\mathfrak{p}$ ニテ $\mathfrak{y}$ ト $\mathfrak{z}$ トモ相切ス。

(III) $\xi(\sigma)$ ハ空間曲線 $\xi(\sigma) + \xi''(\sigma)$ ノ Schmiegkugeln ナルコトハ Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd. S. 139 ニ於ケル G. Thomsen ノ論文カラ分ル。

ソコデ今別ニ他ノ空間曲線 $\eta(\sigma) + \eta''(\sigma)$ ヲ考ヘルト其 Schmiegkugeln ハ $\eta(\sigma)$ トナル。

今コノ二ツノ曲線ハ垂直デアリマタ Schmiegkugeln モ互ニ垂直ナラバ

$$(1)\quad (\xi\eta) = 0,$$

(2) $(\xi+\xi'', \quad \eta+\eta'')=0$

トナル、(1), (2) ヨリ

(3) $2(\xi'\eta')=(\xi''\eta'')$

トナル、(3) ハコノ場合必要ニシテ且ツ十分ナル條件ニナル。

此ノ場合ニモシ η ガ $\xi+\xi''$ ニ垂直, ξ ガ $\eta+\eta''$ ニ垂直ニシテ ξ ト η トガ垂直ナラバ

(4) $(\xi'\eta')=0$

トナル。コノ場合 ξ ト η トガ垂直トイフ代リニ ξ ト η トガ相切スルトシテモ同様ノコトガイヘル。

尚前ノ場合デ (1) ノ代リニ $(\xi\eta)=1$ ヲ以テオキカヘ得ベシ。

次ニ式ノ性質カラ直チニ分ルコトハ $\xi+\eta$ ハ

$\{\xi+\eta\}+\{\xi+\eta\}''$ ナル空間ノ曲線ノ Schmiegkugeln ニナル。

ツマリ次ノ様ニイヘル。

平均曲線ノ Schmiegkugeln ハ平均 Schmiegkugeln ニナッテヰル。

球 $\mathfrak{z}$ ガ ξ, η ニ垂直デアリ同時ニ曲線 $\xi+\xi''$, $\eta+\eta''$ ニ垂直ナラバ

$$(\xi\mathfrak{z})=0, \quad (\eta\mathfrak{z})=0$$

$$(\xi\mathfrak{z})+(\mathfrak{z}\xi'')=0, \quad (\eta\mathfrak{z})+(\eta''\mathfrak{z})=0$$

トナリ

$$(\mathfrak{z}\xi'')=0, \quad (\mathfrak{z}\eta'')=0$$

ヲ得ベシ。

(IV) 空間曲線 K_1, K_2, K_3 ガアッテソレ等ノ曲線ノ *Schmiegkugeln* ヲソレゾレ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ トシ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ノ間ニ

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \alpha \mathfrak{y} + \beta \mathfrak{z}$$

ナル関係アリトセバ K_1, K_2, K_3 ノ間ニ

$$(2) \quad K_1 = \alpha K_2 + \beta K_3$$

ナル関係アルコトガ分ル。コヽニ α, β ハ *Skalare Gröszen* デアル。

コノ証明ハ (1) ヨリ

$$(3) \quad \mathfrak{x}'' = \alpha \mathfrak{y}'' + \beta \mathfrak{z}''$$

デアリ (1), (3) ヨリ

$$\{\mathfrak{x} + \mathfrak{x}''\} = \alpha \{\mathfrak{y} + \mathfrak{y}''\} + \beta \{\mathfrak{z} + \mathfrak{z}''\}$$

ヨリ上ノコトガ分ル。

(V) $\xi, \mathfrak{y}$ ヲバ互ニ直角ニ交ハル R_2 内ノ円トシテ

$$(1) \quad \eta = (\eta \xi)\xi + (\eta \mathfrak{y})\mathfrak{y}$$

但シ $\qquad (\eta \xi)^2 + (\eta \mathfrak{y})^2 = 1$

ヲ考ヘルトキハ η ハ $\xi, \mathfrak{y}$ ナル二交点ヲ通ル R_2 内ノ円デアルコトガ容易ニ分ル。

上ノコトヲバ $\xi, \mathfrak{y}$ ヲ R_3 内ノ球トシテモ類似ノコトガ成立ツ、此ノ場合ニ $\eta, \xi, \mathfrak{y}$ ハミナ一ツノ *Parameter* σ ノ函数デアルトシテ $\eta, \xi, \mathfrak{y}$ ヲ *Schmiegkugeln* トスル所空間曲線ヲバソレゾレ K_1, K_2, K_3 トセバ

$$(2) \quad K_1 = (\eta \xi) K_2 + (\eta \mathfrak{y}) K_3$$

ガ成立ス。

(1)ニ於ケル η ナル円ガ R_2 ノ一点 ρ ヲ通過スル條件ハ

(3) $$(\eta\xi)(\xi\rho)+(\eta y)(y\rho)=0$$

デアル。同様ニシテ ξ, y ヲバ R_3 内ノ垂直ニ交ハル球トセバ (3)ハ ξ, y ノ交円ト一点 ρ トヲ一球ガ通ル所ノ條件ニナル。

尚、亦 R_2 ノ場合ニ (1) ヲ考ヘ直交スル R_2 ニ於ケル円 ξ_1, y_1 ノ交点ヲ通ル円 η ノ式ハ

(4) $$\eta=(\eta\xi_1)\xi_1+(\eta y_1)y_1$$

デアル。R_2 内ノ直交二円 ξ_2, y_2 ノ交点ヲ此ノ η ガ通ルナラバ

(5) $$\eta=(\eta\xi_2)\xi_2+(\eta y_2)y_2$$

デアル、逆ツテ斯ノ如シ。

従ツテ此ノ場合

(6) $$(\eta\xi_i)\xi_i+(\eta y_i)y_i=(\eta y_j)\xi_j+(\eta y_j)y_j$$

ガ成立ツ、ココニ $i, j=1, 2, \cdots\cdots$ デアル。

次ニ (1) ノ種類ノ二ツノ円 η, ρ ヲ下ノ様ニ考ヘル。

(7) $$\eta=(\eta\xi_1)\xi_1+(\eta y_1)y_1,$$

(8) $$\rho=(\rho\xi_2)\xi_2+(\rho y_2)y_2$$

サテ η, ρ ガ互ニ垂直ナラバ

(9) $$(\eta\xi_1)(\rho\xi_2)(\xi_1\xi_2)+(\eta y_1)(\rho\xi_2)(y_1\xi_2)$$
$$+(\eta\xi_1)(\rho y_2)(\xi_1 y_2)+(\eta y_1)(\rho y_2)(y_1 y_2)=0$$

ガ成立ツ。

次ニ此ノ互ニ垂直ナル η, ρ ハマタ一ツノ円系 $\mathfrak{g}$ ヲ定メ

(10) $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}\eta)\eta + (\mathfrak{g}\rho)\rho$

デアル。コレニ(9)ガ成立ツ。

尚(9)ニテ η, ρ ガ互ニ切スルナラバ(9)ノ右辺ハ0ノ代リニ1ニナルコトハ勿論デアル。

(1)ニ於テ η ガ $\xi, \mathfrak{y}$ ト等角ヲナスナラバ(1)ノ η ハ次ノヤウニナル。

(11) $\eta = (\eta\xi)\{\xi + \mathfrak{y}\}$,

コレニ $2(\eta\xi)^2 = 1$, $(\eta\xi) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ デアル。