700

~~670~~. van der Waerden ノ《ユークリッド幾何學ノ論理的基礎》カラ

寺阪 英孝 (阪大)

Hilbert ノ幾何學ノ基礎デハ運動ノ考ヲ入レズニ三角形ノ合同マデ公理トシテヰルガ、ユークリッド式ノ重ネ合ハセル方法モ、運動トイフモノヲ適當ニ公理化セバ，却ッテ有力ニモナリ：教育的デモアルトイフ考カラ van der Waerden ハ表題ノ書物デ<u>移動</u>ナルモノヲ公理的ニ導入シテ合同ヲ取扱ッテヰル。ソレガ手際ヨイノデ公理ダケデモ紹介シタクナッタ。尤モ運動ヲ使フトイフノハ Klein ノ Elementarmathematik II ニモアルケレドモ，スケッチニ過ギナイカラ，ハッキリシタ公理ヲ擧ゲルノモ無駄デハアルマイト思フ。

序ニコレカラ自然ニ起ル射影幾何學ノ問題ニツイテハ、諸賢ノ御教示ヲ仰ギタイノデ、紙面ヲカリルコトニシタ。

尚 van der Waerden ノ本ハ 87 頁ノ小冊デアルケレドモ秀才ラシク良クマトメテアル。

合同ノ公理ハ次ノ通リ (v. d. W. 氏ノ本デ I ハ結合，II ハ順序ノ公理故、コヽデハ III トナッテヰル)

III.1. 移動 ν ハ各点 P ヲ唯一点 Q ニ移ス。

III.2. B ガ A ト C トノ間ニアリ、且ツ ν ガ一ツノ移動ナラバ νB ハ νA ト νC トノ間ニアル。

III.3. BガAトCトノ間ニアレバ，ACハ決シテABト合同ニハナラナイ。（即チACヲABニ移ス移動ハ存在シナイ）

III.4. Dガ$\angle BAC$ノ中ニアレバ，$\angle BAC$ハ決シテ$\angle BAD$ト合同ニハナラナイ。

III.5. 各移動νニ對シν^{-1}ナル移動ガ存在シテ，$\nu^{-1}(\nu P)=P$トナル。（即チ$\nu P=Q \longrightarrow \nu^{-1}Q=P$）

III.6. 二ツノ移動$\mathcal{U}, \nu$ニ對シ一ツノ移動$\mathcal{W}$ガ存在シテ凡テノPニツキ$\mathcal{W}P=\nu(\mathcal{U}P)$トナル。（$\mathcal{W}$ハ$\mathcal{U}$ト$\nu$トノ積$\nu\mathcal{U}$ニ他ナラナイ，即チ

$$\mathcal{W}P=(\nu\mathcal{U})P=\nu(\mathcal{U}P)$$

）

最後ノハ少々長イガ

III.7. 與ヘラレタ点Aヲ他ノ與ヘラレタ点A′ニ移シ，第二ノ與ヘラレタ点Bヲ與ヘラレタ半直線A′B′上ノ一点ニ移シ，直線AB外ノ第三ノ與ヘラレタ点CヲA′B′ノ指定サレタ側ニ移ス，トイフ斯様ナ移動ガ常ニ存在スル。

以上デ分ル通リ（即チIII.5.，III.6）移動νハ群ヲ造ル．線分ノ大小，線分ノ和，三角形ノ合同等ハ移動ニヨッテ簡単ニ定義サレルシ，種々ノ定理ノ証明モ中等学校デヤルノト同ジヤウナ方法デ出来ルノヲ知ルノモヨイ。然シココデハ公理ヲ挙ゲタ丈デ，アトハ割愛スルコトトシ度イ。

van der Waerden ハ合同幾何学ダケヲ問題ニシテキタガ，同ジ方法ヲ射影幾何学ニ適用シタラドウカトイフ

問題が自然ニ起ル訳デアル。

移動ノ概念ニ對應スルモノトシテハ射影変換デアルカラコレヲPト名ヅケテ上ノ公理IIIノヤウナモノヲ造リ、ソレカラDesarguesカPascal定理ヲ導キ出スコトヲ試ミルノハ面白イコトト思ハレル。組織的ニ研究スルコトハ有志ノ方ニ御願ヒスルコトトシ、氣マグレニ思ヒ付イタコトヲ次ニ述ベテ御参考ニ供シタイ。

直線ガ直線ニ對應スル一對一ノ点変換ヲ射影変換ト名ヅケ次ノ公理ヲ設ケル。(平面ダケ考ヘル)

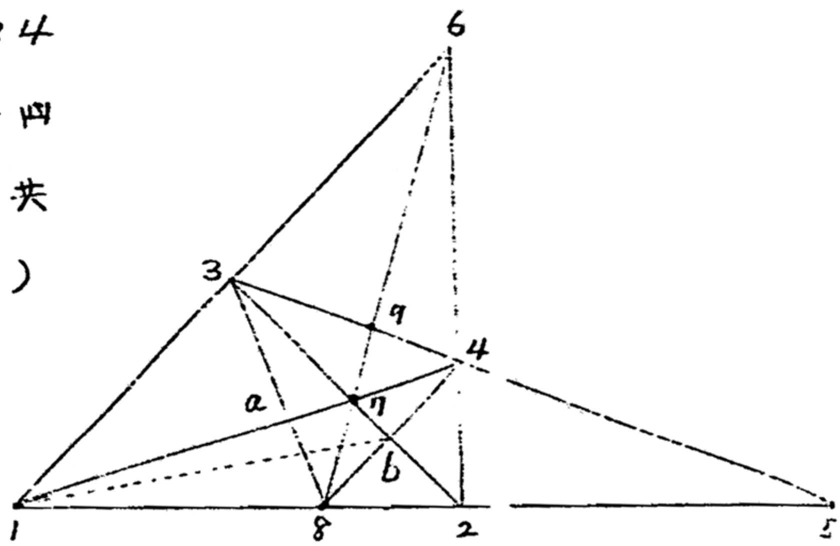
公理I ドノ三点モ共線デナイヤウナ四点(一般ノ位置ニアル四点)ヲ、同性質ノ四点ニ對應サセル射影変換ハ必ズ存在シ、且唯一デアル。

公理II 射影変換ニヨッテ直線上ノ三点ガ不動ナラバ、コノ直線ノドノ点モ不動デアル。

此ノ外ニ射影変換ガ群ヲツクルトカ云フヤウナ公理ヲ入レナケレバナラナイガ、ソレハ簡単ノタメ省略スル。扨テ公理IIハ強イ條件デ通常Pascal定理ト同等ト云ハレテヰルモノダカラ、I, II双方共ニ用ヰレバDesarguesモPascalモ出サウデアルコトガ豫想サレル。コヽデ考ヘタイノハ公理IIヲ假定セズニ公理Iダケヲ許シタラ如何ナルカ。

ト云フノデアル。

ソコデ先ヅ1234ヲ一般ノ位置ニアル四点（即チドノ三点モ共線デナイヤウナ四点）トシ，公理Ⅰニヨッテ



$1234 \barwedge 2143$

ノ如ク對應スル変換Pヲ考ヘル。ソウスルト直線(12)ハ自身ニ，(34)モ自身ニ對應スルカラ（12），（34）ノ交点5ハ不動点ニナル。又對應Pニヨッテ(13)$\longrightarrow$(24)，(24)$\longrightarrow$(13)ナル故、(13)ト(24)トハ入レ換リ、従ッテソノ交点6ハ不動点。同様ニ(14)，(23)ノ交点7モ不動点ニナル。ヨッテ直線(67)ハ不動直線ニナル。（(67)上ノスベテノ点ガ不動カ否カハ不明）

(12)，(67)ガ不動直線ダカラ、ソノ交点8ハ不動。同様ニ9モ不動。

又(14)，(38)ノ交点ヲa，(23)，(48)ノ交点ヲbトスレバコレラノ直線ハ入換ルカラ．a，bモ入換リニナル。ヨッテ直線(ab)ハ不動ニナル。ソウスルト(ab)ハ点5ヲ通ラナケレバナラナイコトニナルノデアル。何者(ab)，(12)ノ交点ヲ假ニcトスレバ，(ab)モ(12)モ共ニ不動直線ダカラcモ不動ニナルコトハ確カデアルが、モシcガ5ト一致シナケレバ（cガ8ト一致スルコトハナイノダカラ）

c, 5, 6, 7 ハ一般ノ位置ニアッテ而モ不動ナル故, 変換 P ハ不動変換トナッテアフ筈ダカラデアル。

即チ上圖ノヨウナ圖形デハ a, b, 5 ガ共線トナルコトガ証明出来タ。コレハ Desargues ノ定理ノ特別ナ場合ニ外ナラナイ。

上ノ考ヘヲモ一度ツカフト (1b), (2a) ガ (67) 上デ交ハルコトガ容易ニ証明出来ル。所デ 1, 2, 3, 4 カラ順ニ作図ヲシテ、最後ニ (1b), (2a) ガ (67) 上デ交ハルトイフコトヲ公理 I トハ関係ナク改メテ公理ニ入レルナラバ, 1 2 3 4 四点カラアラエル結合デ造ッタ点ガ所謂 Möbius ノ網ヲ形成スル. トイフコトガ R. Moufang ノ研究デ知ラレテキルノデ. 結合公理 I カラハ Möbius ノ網ノ存在ガ分ッタ訳デアル。

然もコレ以上ノコトガ出ルカ否カ私ハ知ラナイノデ考ヘテ頂ケタラ有難イノデアル。Desargues ノ定理ハ多分出ナイデアラウ、ノ Hilbert 式ノ図形計算ガ出来ルカ否カガ問題デアル。

参考ノタメニ Moufang ノ論文ヲアゲルナラバ

R. Moufang: Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene (Math. Ann. 105, 1931)

及ビ引続キ Math. Ann ニ数個ノ Ergänzungen ガ出テキル。モット整頓シタラ分リ易クナリハシマイカト思ハレル。何ニシテモ基礎論ガモット形式的ニナラナケレバ

完全ナモノトハ云ヘナカラウ。