# 691. Überdeckung ノ一ツノ Dualitätssatz ニ就テノ注意

山内　省三

§1. Komplex ノ Überdeckung[1] ニ於ケル Bettische Gruppe ノ定義ハスベテ小松氏ノソレ[2] ニ依ルコトニスル。

即チ Komplex $K_i$ ノ Überdeckung ヲ $U_i$、ソレニ對シテ定義サレタ $k$-dim. 0-Bettische Gruppe 及ヒ u-Bettische Gruppe ヲ夫々 ${}_iB_0^k(K_i, \mathfrak{R})$, ${}_iB_u^k(K_i, \mathfrak{R})$ トス。

<u>Lemma.</u> Komplex $K_m$ ガ $K_n$ ニ (auf) Simplizial abbilden サレルトキハ ${}_nB_0^k(K_n, \mathfrak{R})$ ハ ${}_mB_0^k(K_m, \mathfrak{R})$ ニ homomorph ニ (in) abbilden サレル。

証明.[3]

---

1) K. Reidemeister: überdeckungen von Komplexen. Crelle Journal 173

2) A. Komatu: Über die Dualitätssätze der Überdeckungen Jap. Journal of Math. (1936)

3) A. Komatu: Über die Ringdualität eines Kompaktums TÔHOKU. Math. Journal vol. 43 (1937)

証明. Simplizialer Abbildung ヲ $\varphi_n^m(K_m)=K_n$ トス。

${}_mf^k\in{}_nF^k(K_m,\mathfrak{A})$ ヲ ${}_nf^k\in{}_nF^k(K_n,\mathfrak{A})$ ニ對應セラレタ Kette トス。

$$ {}_mf^k({}_ma_i^k)={}_nf^k(\varphi_n^m({}_ma_i^k)) \qquad (1)$$

但シ Kette ${}_mf^k$ ニ對シテハ $\dim\varphi_n^m({}_ma_i^k)<k$ ノトキハ ${}_mf^k=0$ トス。

今 ${}_nf^k$ ヲ oberer Zyklus トス。

$$ g_0\,{}_nf^k={}_nf^{k+1}({}_na_j^{k+1})=\sum_{{}_na_j^{k+1}\to{}_na_i^k}{}_n\varepsilon_{ji}^k\,{}_n\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}\,{}_nf^k({}_na_i^k)=0 \qquad \text{-----}(2)$$

一方 $g_0\,{}_mf^k={}_mf^{k+1}({}_ma_j^{k+1})-\sum_{{}_ma_j^{k+1}\to{}_ma_i^k}{}_m\varepsilon_{ji}^k\,{}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}\,{}_mf^k({}_ma_i^k)$

$$ =\sum_{{}_ma_j^{k+1}\to{}_ma_i^k}{}_m\varepsilon_{ji}^k\,{}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}\,{}_nf^k(\varphi_n^m({}_ma_i^k)) \qquad \text{-----}(3)$$

所デ $U_m$, $U_n$ ノ Ingidenzmatrizen ノ間ニハ次ノ関係ガアル。[4]

$$ {}_m\varepsilon_{ji}^k\,{}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}={}_m\varepsilon_{ji}^k\,{}_n\bar{\gamma}_{ij}^{k+1} \qquad (4)$$

(4) ト (2) ヨリ (3) ノ右辺 $=0$

---

4) 小松氏. 紙上談話會 10 冊.

(4) ナル關係式ハ ${}_m\varepsilon_{ij}^{k+1}\,{}_m\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}={}_n\varepsilon_{ij}^{k+1}\,{}_n\bar{\gamma}_{ij}^{k+1}$ ト同ジ.

又 ${}_nf^k$ ガ o-Rand ナヲ $(k-1)$-dim. Kette ガ存在シテ $g_0\ {}_nf^{k-1}={}_nf^k$

$$\therefore\ g_0\ {}_nf^{k-1}={}_nf^k({}_na_i^k)-\sum_{{}_na_i^k\to{}_na_j^{k-1}} {}_n\varepsilon_{ij}^{k-1}\ {}_n\bar{\eta}_{ji}^{k}\ {}_nf^{k-1}({}_na_j^{k-1}) \cdots\cdots(5)$$

今 ${}_nf^k$ ニ對應セル Kette ヲ ${}_mf^k$ トスレバ (5), (4), (1) ヨリ

${}_mf^k$ モ亦 o-Rand ニナル。

$$\text{即}\ {}_mf^k={}_nf^k(g_n^m({}_ma_i^k))$$

$$=\sum_{{}_na_i^k\to{}_na_j^{k-1}} {}_n\varepsilon_{ij}^{k-1}\ {}_n\bar{\eta}_{ji}^{k}\ {}_nf^{k-1}(g_n^m({}_ma_j^{k-1}))=g_0\ {}_nf^{k-1}$$

コノ對應ハ明ニ Hommorphismes

故ニ ${}_nB_0^k(K_n,\mathfrak{A}) \xrightarrow{\text{homomorph in}} {}_mB_0^k(K_m,\mathfrak{A})$

## §2. Kompaktum $F^n\subset R^n$:

$F^n$, Projektionsspektrum

(1) $K_1, K_2 \overset{\leftarrow}{\cdots\cdots}, K_m, K_{m+1}, \cdots\cdots$ $g_n^m(K_m)=K_n$

$\dim. K_m=n$

Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ ヲ Koordinaten-gruppe ニトル。

(1) ノ Überdeckungsfolge ヲ

(2) $U_1, U_2, \overset{\leftarrow}{\cdots\cdots} U_m, U_{m+1}, \cdots\cdots$

$U_1$ ノ Inzidenzmatrizen ヲ決定シタ後ノ $U_i$ $(i>1)$ ノ Inzidenzmatrizen ノ決定ハ小松氏：紙上談話會 107 ニ依ル。

Lemma 1 ヨリ

$$(3)\quad {}_1B_0^k(K_1,\mathfrak{A})\to{}_2B_0^k(K_2,\mathfrak{A})\to\cdots\cdots\to{}_mB_0^k(K_m,\mathfrak{A})\to\cdots\cdots$$

Folge (3) ノ Limesgruppe ヲ $B_0^k(F,\mathfrak{A})$:

ツマリ Komplexenfolge (2) ノ Limesraum ヲ Kompaktum F ノ überdeckung ト $\mathfrak{U}$ ト定義スルトキ $\mathfrak{U}$ ニツイテ F ニ関シテ定義サレタ k-dim ober Bettische Gruppe ガ $B_0^k(F,\mathfrak{A})$ デアル。

Lemma 2.

n-dim. Zellen Komplex K ノ duale. Sternkomplex ヲ $K^*$ トスレバ

$$B_0^r(K,\mathfrak{A})\approx B_u^{n-r}(K^*,\mathfrak{A})\text{[5]}$$

Folge (1) ノ duale sternkomplexenfolge ヲ

$$(4)\quad K_1^*,\ K_2^*,\ \underset{\to\varphi^*}{\cdots\cdots},\ K_m^*,\ K_{m+1}^*,\cdots\cdots$$

トスルト

$$(5)\quad {}_1B_u^{n-k}(K_1^*,\mathfrak{A})\to\cdots\cdots\to{}_mB_u^{n-k}(K_m^*,\mathfrak{A})\to\cdots\cdots$$

ココニ $\quad {}_iB_0^k(K_i,\mathfrak{A})\approx{}_iB_u^{n-k}(K_i^*,\mathfrak{A})\qquad i=1,2,\cdots\cdots$

---

5) A. Komatu: Über die Dualitätssätze der überdeckungen.

コヽニ ${}_{n}B_{u}^{n-k}(K_{n}^{*}, \mathfrak{a}) \rightarrow {}_{m}B_{u}^{n-k}(K_{m}^{*}, \mathfrak{a})$ ヘノ對應ハ次ノヤウニ考ヘル。 $(n < m)$

先ヅ $K_{n} \xleftarrow{g} K_{m}$ $n < m$ $g_{n}^{m}(K_{m}) = K_{n}$ ニ於テ

$$
{}_{n}a_{j}^{k} \in K_{n} \text{ ニ abbilden サレル } K_{m} \text{ ノ Elementen ヲ } \begin{cases} {}_{m}a_{i_1}^{k} \\ {}_{m}a_{i_2}^{k} \\ \vdots \\ {}_{m}a_{i_s}^{k} \end{cases}
$$

トス。（ §1, (1) ヨリワカル様ニ同次元ノモノダケ考ヘテオケバヨイ）

即チ $g_{n}^{m}({}_{m}a_{i_t}^{k}) = {}_{n}a_{j}^{k}$ $\quad t = 1, 2, \text{-----} s$

dual Operator ヲ $\mathfrak{H}$ トス.

ソノ意味ハ

$$
\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}\,{}_{n}a_{j}^{k} &= {}_{n}b_{j}^{n-k} \\ \mathfrak{H}\,{}_{m}a_{i_t}^{k} &= {}_{m}b_{i_t}^{n-k} \\ \mathfrak{H}f^{k} &= f^{*n-k} \end{aligned}\right\}
$$

$b^{n-k} \in K^{*}$ ハ $a^{k} \subset K$ ニ一對一ニ對應スル Element

$f^{*n-k}$ ハ $K^{*}$ ノ Element $b^{n-k}$ ニ關シテ定義サレル Kette.

Inzidenzrelation ニ就イテハ

$$K: \quad \varepsilon_{ij}^{k}(a_i^k, a_j^{k-1})$$
$$K^*: \quad \overset{*}{\varepsilon}_{ji}^{\,n-k+1}(\varkappa a_i^k, \varkappa a_j^{k-1}) = \overset{*}{\varepsilon}_{ji}^{\,n-k+1}(b_i^{n-k}, b_j^{n-k+1})$$
$$\varepsilon_{ij}^{k} = \overset{*}{\varepsilon}_{ji}^{\,n-k+1}$$

überdeckung $U$ デハ

$U$: $a_i^k$ ヲ überlagern スル $x a_i^k$ ニ對シテ $a_j^{k-1}$ ヲ überlagern スル $x' a_j^{k-1}$ が存在シテ

$x a_i^k$ ト $\varepsilon_{ij}^{k} x \gamma_{ij}^{k} a_j^{k-1}$ トが inzidenz ;

$$\begin{cases} x' = x\gamma_{ij}^{k} \\ \gamma_{ij} \text{ ハ } \mathfrak{R} \text{ ノ Automorphismus} \end{cases}$$

コノコトヲ $x a_i^k \to x' a_j^{k-1}$ デ示スト

$U^*$: $\varkappa(x a_i^k) = \varkappa(x)\cdot\varkappa(a_i^k)$ $\qquad \varkappa(x' a_j^{k-1}) = \overset{*}{x}{}' b_j^{n-k+1}$

$$= \overset{*}{x}\, b_i^{n-k}$$

$$\overset{*}{x}\, b_i^{n-k} \longleftarrow \overset{*}{x}{}'\, b_j^{n-k+1}$$

コヽニ $\overset{*}{x} = \overset{*}{x}{}'\, \overset{*}{\gamma}_{ji}^{\,n-k+1}$

$$\therefore \ \varkappa x = \varkappa x' \overset{*}{\gamma}_{ji}^{\,n-k+1}$$

$$= \varkappa x\, \gamma_{ij}^{k}\, \overset{*}{\gamma}_{ji}^{\,n-k+1}$$

故ニ überdeckung ノ Inzidenzmatrizen ノ $U, U^*$ ニ於ケル關係ハ

$$\left(\gamma_{ij}^{k}\right) = \left(\overset{*}{\gamma}_{ji}^{\,n-k+1}\right)^{-1}$$

dual Operator $\varkappa$ ヲ上ノ如リ考ヘル.

サテ §1, (1) ニヨリ $K_n$ ニ關スル Kette $f_n$ ニ對應セル $K_m$ ノ Kette ヲ $f_m$ トスレバ Gruppe $\mathfrak{a}$ ノ Element トシテ

$${}_m f\left({}_m a^k_{i_t}\right) = {}_n f\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)$$

ナル對應ガツケテアツタ。

Operator $\mathfrak{X}$ ニヨリ

$$\begin{array}{ccc} & & {}_m a^k_{i_1} \\ & \swarrow & \vdots \\ {}_n a^k_j & \leftarrow & \\ & \nwarrow & \vdots \\ & & {}_m a^k_{i_s} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & {}_m b^{n-k}_{i_1} = \mathfrak{X}\,{}_m a^k_{i_1} \\ & \nearrow & \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathfrak{X}\,{}_n a^k_j = {}_n b^{n-k}_j & \rightarrow & \\ & \searrow & \vdots \qquad\quad \vdots \\ & & {}_m b^{n-k}_{i_s} = \mathfrak{X}\,{}_m a^k_{i_s} \end{array}$$

$$\mathfrak{X}\left({}_m f^k\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right) = \mathfrak{X}\left({}_n f^k\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)\right) = \mathfrak{X}\left({}_n f^k\left({}_n a^k_j\right)\right)$$

$$t = 1, 2, \cdots\cdots s$$

$$\text{i.e.}\quad \mathfrak{X}\,{}_m f^k\left(\mathfrak{X}\,{}_m a^k_{i_t}\right) = \mathfrak{X}\,{}_n f^k\left(\mathfrak{X}\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)\right) = \mathfrak{X}\,{}_n f^k\left(\mathfrak{X}\,{}_n a^k_j\right)$$

$$\therefore\quad {}_m \overset{*}{f}{}^{n-k}\left({}_m b^{n-k}_{i_t}\right) = {}_n \overset{*}{f}{}^{n-k}\left(\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)^*\right) = {}_n \overset{*}{f}{}^{n-k}\left({}_n b^{n-k}_j\right)$$

$$t = 1, \cdots\cdots s$$

即チ

$$(6)\qquad {}_m \overset{*}{f}{}^{n-k}\left({}_m b^{n-k}_{i_t}\right) = {}_n \overset{*}{f}{}^{n-k}\left(\left(\varphi^m_n\left({}_m a^k_{i_t}\right)\right)^*\right)$$

$$t = 1, 2, \cdots\cdots s$$

故ニ $\overset{*}{K}_n$ ニ關スル Kette ${}_m\overset{*}{f}{}^{n-k}$ ニ對應セル $\overset{*}{K}_m$ ニ關シテノ Kette ヲ ${}_m\overset{*}{f}{}^{n-k}$ トスルトキ gruppe $\mathfrak{a}$ ノ Element シテ (6) ナル對應ガツイテキル。

<u>THEOREM</u>

(6) ナル對應ノ許ニ於テ Folge (5) ノ Limesgruppe ヲ $B_u^{n-k}(F,\mathfrak{a})$ トスレバ

$$B_0^k(F,\mathfrak{a}) \approx B_u^{n-k}(F,\mathfrak{a})$$

附記

念ノタメニ Lemma 2 ヲ証明シテオク。

即チ $B_0^k(K,\mathfrak{a}) \approx B_u^{n-k}(K^*,\mathfrak{a})$ ナルコト

証明

Überdeckung ノ Inzidenzmatrizen ノ Element デアル $\gamma$ ニツイテハ u-Überdeckung ノ Element $\gamma_{ij}^k(a_i^k \to a_j^{k-1})$ ト o-Überdeckung ノ $\bar{\gamma}_{ji}^k(a_j^{k-1} \to a_i^k)$ トハ identisch ナリト假定シテオク。

$f^k$ ヲ o-Zyklus トス。

$$g_0 f^k = f^{k+1}(a_j^{k+1}) = \sum_{a_j^{k+1} \to a_i^k} \varepsilon_{ji}^k \gamma_{ij}^{k+1} f^k(a_i^k) = 0$$

dual operator $\mathfrak{X}$ ヲホドコス。

$$\varkappa g_0 f^k = \varkappa f^{k+1}(\varkappa a_j^{k+1}) = \sum \varkappa \varepsilon_{ji}^k \varkappa \gamma_{ij}^{k+1} \varkappa f^k(\varkappa a_i^k) = 0$$

$$\therefore \quad \overset{*}{f}{}^{n-k-1}(b_j^{n-k-1}) = \sum_{b_i^{n-k} \to b_j^{n-k-1}} \overset{*}{\varepsilon}{}_{ij}^{n-k} \overset{*}{\gamma}{}_{ij}^{n-k} \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k})$$

$$= g_u \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k}) = 0$$

故ニ 0-Zyklus $f^k$ ニハ u-Zyklus $\overset{*}{f}{}^{n-k}$ ガ對應.

次ニ $f^k$ ヲ 0-Rand トス. 即チ $f^{k-1}$ ガ存在シテ

$$g_0 f^{k-1} = f^k$$

$$g_0 f^{k-1} = f^k(a_i^k) = \sum_{a_i^k \to a_j^{k-1}} \varepsilon_{ij}^{k-1} \gamma_{ji}^k f^{k-1}(a_j^{k-1})$$

$$\therefore \quad \varkappa g_0 f^{k-1} = \varkappa f^k(\varkappa a_i^k)$$

$$= \sum \varkappa \varepsilon_{ij}^{k-1} \varkappa \gamma_{ji}^k \varkappa f^{k-1}(\varkappa a_j^{k-1})$$

$$\therefore \quad \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k}) = \sum_{b_j^{n-k+1} \to b_i^{n-k}} \overset{*}{\varepsilon}{}_{ji}^{n-k+1} \overset{*}{\gamma}{}^{n-k+1} \overset{*}{f}{}^{n-k+1}(b_j^{n-k+1})$$

$$\therefore \quad \overset{*}{f}{}^{n-k}(b_i^{n-k}) = g_u \overset{*}{f}{}^{n-k+1}$$

即チ $\overset{*}{f}{}^{n-k+1}$ ノ存在ガ云ヘタ. 故ニ 0-Rand $f^k$ ニハ u-Rand $\overset{*}{f}{}^{n-k}$ ガ對應.

以上ノ對應ガ Homomorphismus ナルコトハ明. 又 $K$, $K^*$ ハ dual ナルコトカラ $B_0^k(K, \mathfrak{R})$ ハ $B_u^{n-k}(K^*, \mathfrak{R})$

ノ全体ト isomorph.