690. Lie 環ノ derivation I.

吉田　耕作（阪大）

最初ニ Lie 環ノ定義ヲ與ヘテ置キマス：線狀空間 R ニ次ノ條件ヲ滿足スル乘法 $[x, y]$ ガ定義サレテ居ル時ニ R ヲ Lie 環ト呼ブ。

$$\begin{cases} [x, y] = -[y, x], \quad [x+y, z+w] = [x, z]+[x, w] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + [y, z] + [y, w], \\ [\alpha x, \beta y] = \alpha\beta[x, y] \qquad (\alpha, \beta \text{ ハ scalar}) \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \end{cases}$$

R ノ任意ノ要素 x ハ $T_x \cdot y = [x, y]$ ナル如キ R ノ R 内ヘノ一次寫像 T_x ト induzieren スル。

$$T_x T_y \cdot z - T_y T_x \cdot z = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$
$$= [[x, y], z] = T_{[x, y]} \cdot z$$

ダカラ

(1) $\quad [T_x, T_y] = T_x T_y - T_y T_x = T_{[x, y]}$

從ッテ

Lemma 1. T_x ノ全体 $\mathfrak{A}_R$ ハ乘法 $[T_x, T_y]$ ニヨッテ Lie 環ヲ作リ且ツ $\mathfrak{A}_R$ ハ $R/\mathfrak{Z}$（$\mathfrak{Z}$ ハ R ノ核心）ニ同型デアル。

$$T_x \cdot [y, z] = T_x T_y \cdot z = T_{[x, y]} \cdot z + T_y T_x \cdot z$$
$$= [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [T_x \cdot y, z] + [y, T_x \cdot z]$$

ガ成立スル。R ノ R 内ヘノ一次寫像 T ガ

(2) $\quad T \cdot [y, z] = [T \cdot y, z] + [y, T \cdot z]$

ヲ満足スルトキ ニ T ヲ $\mathfrak{R}$ ノ derivation ト呼ブコトニスル。T, S ヲ共ニ $\mathfrak{R}$ ノ derivation トスルト

$TS\cdot[y, z] = T\{[S\cdot y, z] + [y, S\cdot z]\} = [TS\cdot y, z] + [S\cdot y, T\cdot z] + [T\cdot y, S\cdot z] + [y, TS\cdot z]$ トナルカラ $[T, S] = TS - ST$ モ亦 $\mathfrak{R}$ ノ derivation トナル。

Lemma 2. $\mathfrak{R}$ ノ derivation T ノ全体 $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$ ハ乗法 $[T, S]$ ニヨッテ Lie 環ヲ作リ且ツ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ ハ $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$ ノ ideal デアル。

証. $T \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$, $T_x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ トセヨ。

$T T_x\cdot y = T\cdot[x, y] = [T\cdot x, y] + [x, T\cdot y] = T_{T\cdot x}\cdot y + T_x T\cdot y$ ヲ得ルカラ

$$(3)\quad [T, T_x] = T_{T\cdot x}$$

之レハ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ ガ $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$ ノ ideal ナルコトヲ示ス。

以下ニハ $\mathfrak{R}$ ノ係數ノ Körper ヲ実数又ハ複素数体トシ且ツ $\mathfrak{R}$ ハ係數ノ Körper ニ對シテ finite rank ナリトスル。

斯カル $\mathfrak{R}$ ガ準単純ト云フノハ可換 ideal $\neq 0$ ヲ含マスコトデアリ、準単純ナ Lie 環ハ単純且ツ準単純ナ ideal ノ直和ニナル (E. Cartan ノ定理)。然ラバ

定理1. $\mathfrak{R}$ ガ準単純ナラバ

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$$

証. $\mathfrak{R}$ ノ核心 $\mathfrak{Z} = 0$ ダカラ Lemma 1 ニヨッテ $\mathfrak{A}_{\mathfrak{R}}$ ハ準単純デアル。二ツノ case ガ起リ得ル。

Case 1. $\mathfrak{D}_R$ が準単純ナル時. Lemma 2 ニヨリ $\mathfrak{a}_R$ ガ $\mathfrak{D}_R$ ノ ideal ダカラ $\mathfrak{D}_R = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{D}_1$ (直和)。ideal $\mathfrak{D}_1 = 0$ ヲ示スト ヨイ。

共通集合 $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R) = 0$ ダカラ $[T, T_x] = 0$ for $T \in \mathfrak{D}_1$, $T_x \in \mathfrak{a}_R$. ヨツテ (3) ニヨリ $T_{T\cdot x} = 0$。コレハ $T\cdot x = \mathfrak{z}$ for any $x \in R$ ヲ意味スル。$\mathfrak{z} = 0$ ダカラ $T = 0$, 即チ $\mathfrak{D}_1 = 0$

Case 2. $\mathfrak{D}_R$ ガ準単純デナイトスル。即チ $\mathfrak{D}_R$ ノ可換 ideal $\mathfrak{D}_1 \neq 0$ ガ存在スルトスル。$\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{a}_R$ 共ニ $\mathfrak{D}_R$ ノ ideal ダカラ $[T, T_x] \in (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R)$ for $T \in \mathfrak{D}_1$, $T_x \in \mathfrak{a}_R$. 所ガ $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R)$ ハ $\mathfrak{D}_1$ ト共ニ可換且ツ $\mathfrak{a}_R$ ノ ideal ニナル。$\mathfrak{a}_R$ ガ準単純ダカラ $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R) = 0$. ヨツテ Case 1 ニ於ケルト同様ニシテ $\mathfrak{D}_1 = 0$ ヲ得ル。之ハ矛盾デアルカラ Case 2 ハ起リ得ナイ。斯クシテ

$$\mathfrak{a}_R = \mathfrak{D}_R. \qquad \text{以上。}$$

(注意) 上定理ハ Cartan ノ Thése P. 113 ノ結果カラモ導ケルノデアルガ, コノ Cartan ノ結果ハ相當面倒ナ計算ヲ俟ツテ得ラレタノデアルシ, 又ハ Cartan ハ differential operators ノ Lie 環ニツイテノミ議論シテ居ルノデ新証明?ヲシテ見タノデアリマス。

R ノ R 全体ヘノ一次寫像 T ガ

(4) $\mathsf{T}\cdot[y, z] = [\mathsf{T}\cdot y, \mathsf{T}\cdot z]$

ヲ満足スルトキニ T ヲ R ノ automorphism ト呼ブ。T ノ全体ハ群ヲ作ル, 之レヲ $\overline{\mathfrak{a}}_R$ ト書クコトニスル。一次

独立ナ基ヲ $\mathfrak{R}$ ニ撰ベバ $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}$ ヲ topologise デキル。即チ此ノ基ニ対シテハ $\overline{\mathrm{T}}$ ハ行列 $\|\overline{t}_{ij}\|$ デ與ヘラレルカラ

$|\overline{\mathrm{T}}| = \sqrt[2]{\sum_{i,j} |\overline{t}_{ij}|^2}$ デ $\overline{\mathrm{T}}$ ノ絶對値ト定義スレバ $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}$ ハ $|\overline{\mathrm{T}} - \overline{\mathrm{S}}|$ ナル距離ニヨッテ locally compact ナ topological group ニナル。$\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}$ ノ infinitesimal operators T ハ

$$\begin{cases} \mathrm{T} = \lim_{i\to\infty} (\overline{\mathrm{T}}_i - \overline{\mathrm{E}})/\varepsilon_i \\ \overline{\mathrm{T}}_i \in \overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}, \ \lim_{i\to\infty} \overline{\mathrm{T}}_i = \overline{\mathrm{E}} \ (\textit{identical automorphism}) \end{cases}$$

ε_i ハ $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$ ナル如キ實數列。

ノ如クシテ得ラレル $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{R}$ 内ヘノ一次寫像ノ全体デアル。

(4) カラ直グワカル如ク，斯カル inf. operator T ハ $\mathfrak{R}$ ノ derivation デアル。又逆ニ $\mathrm{T} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$ ナラ

$\overline{\mathrm{T}} = \exp \mathrm{T} = \overline{\mathrm{E}} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{T}^n/n!$ ガ

(5) $\quad \overline{\mathrm{T}}\cdot[y, z] = [\overline{\mathrm{T}}\cdot y, \overline{\mathrm{T}}\cdot z]$

ヲ満足スルコトガ (2) カラワカルカラ

定理 2. Lie 環 $\mathfrak{R}$ ノ automorphism group ノ infinitesimal operator 全体ハ $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$ ト一致スル。

次ニ $\mathfrak{G}$ ヲ Lie 群トシ $\overline{\overline{\mathrm{T}}}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ continuous automorphism トセヨ。$\overline{\overline{\mathrm{T}}}$ ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ノ one-parameter subgroup ハ又 $\mathfrak{G}$ ノ one-parameter subgroup ニ寫サレルコトカラ $\bar{\bar{T}}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Lie 環 R ノ automorphism $\bar{T}$ ヲ induce シ, 又 R ノ automorphism $\bar{T}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ continuous automorphism $\bar{\bar{T}}$ ヲ定義スル。又 $\mathfrak{G}$ ノ inner automorphisms $\{\bar{\bar{T}}\}$ ノ inf. operators ハ $\mathfrak{A}_R$ ニ一致スル。以上ハ良ク知ラレテ居ル事柄デス。

特ニ $\mathfrak{G}$ ヲ compact ナ Lie 群トスルト, Cartan ノ定理ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ハ準単純ナ Lie Normalteiler $\mathfrak{G}_1$ ト compact ナ可換 Lie Normalteiler $\mathfrak{G}_2$ トノ直積ニナル (local ニ)。$\mathfrak{G}_2$ ハ toroidal group[1] ダカラ $\mathfrak{G}_2$ ノ cont. automorphism デ充分 identical automorphism ニ近イ奴ハ ident. auts. ニナルコトガ容易ニワカル。ヨッテ定理1及ビ2ニヨリ

定理3. (Cartan ノ定理) 準単純又ハ compact ナ Lie 群 $\mathfrak{G}$ ノ cont. automorphism ノ群ハ ident. automorphism ノ近傍デハ $\mathfrak{G}$ ノ inner automorphism group ニ一致スル。

此ノ次ニハ定理1ノ二三ノ應用ヲ試ミタイト思ヒマス。

---

(1) 1ヲ法トシタ實數ノ加法群有限個ノ直積.