686. 補助変數ヲ含ム微分方程式, II

福原　滿洲雄（九大）

1. 微分方程式ノ解ノ存在定理、単独條件及ビ補助変數ニ関スル微分可能性（即チ補助変数ヲ含ム微分方程式ノ解ノソノ補助変数ニ関スル微分可能性）ガ微分方程式ノ解ノ近似的ノ研究ニ於テ基本的ナ定理デアル。コレ等ノ定理ガ微分方程式ノ研究ニ如何ニ利用サレルカハ今迄屡々説明シタ所デアル。解ノ存在定理ヤ単独條件ニ関シテハ已ニ多クノ學者ニ依ッテ十分ニ詳シク論ゼラレタ、ソレデモ微分方程式ノ特異点ノ研究ヲ行フ場合ニ從来知ラレタ結果ダケデハ不足ヲ感ズルノデ、色々ナ條件ノ下ニ於テ存在定理ヲ証明スル必要ヲ生ズル。

併シサウイフ場合ニ、抽象空間ニ於ケル不動点ノ存在定理ヲ使フト大抵解決ガツク、コレハ実ニ有難イコトデアル。同ジヤウニ補助変数ニ関スル微分可能性ガ扱ヘタラヨイノダガ、今迄ノ所サウ思フヤウニハ行カナイ。

本誌89号デ述ベタ結果ガ満足スベキモノデナカッタノデ、モットヨイ結果ヲ99号デ述ベタノデアルガソレデモ未ダ十分デナイ、ドノ程度ノ結果ヲ以テ満足スルカトイフコトハ、應用上ノ要求カラキマルノデアルカラ簡単ニ説明シ難イガ、成ルベク分リヨク述ベテ見ヨウ。

2. 問題ノ微分方程式ヲ

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = f(t, y, \lambda)$$

トシ、コノ右辺ハ

(2) $a<t<b,\quad |y|<B(t),\quad |\lambda-\lambda_0|<\gamma$

デ連続、y,λ ニ関シテ連続ナ偏導函数 $f'_y(t,y,\lambda)$, $f'_\lambda(t,y,\lambda)$ ヲ持ツトスル。y,λ ガ複素変数ナラバ、ソレハ $f(t,y,\lambda)$ ガ y,λ ニ関シテ正則デアルコトヲ意味スル。

$r(t)$ ハ $a<t<b$ デ正ノ値ヲトル函数トシ, $a<t<b$ デ $|y|<B(t)$ 及ビ $t\to a+0$ ノトキ $y=O(r(t))$ ヲ満足スル (1) ノ解ガ如何ナル條件ノ下ニ λ ニ関シテ微分出来ルカヲ論ズルノガ主眼デアル。

$y=O(r(t))$ ナル條件ノ代リニ $y=o(r(t))$ 或ハ

$$\lim_{t\to a+0}|y|/r(t)=0$$

ナドヲ取リタイ（應用上）場合モ起ルデアラウ。ドレヲ取ッテモ同ジヤウナモノダカラ, $y=O(r(t))$ ヲ取ッテ説明スルノデアル。

3. (2) ニ於テ

(3) $|f(t,y,\lambda)|\leqq H(t)|y|+G(t)$

ガ成立スルモノトスレバ（コノ不等式ノ代リニ $|f(t,y,\lambda)|\leqq F(t,y,\lambda)$ ヲ取ッタラナドトイフ考ヘモ起ルダラウガ、自分ガ現在應用シヨウトシテヰル問題ニハ (3) デ十分ナノデアル), (1) ノ解ト

(4) $$\frac{dY}{dt}=H(t)Y+G(t)$$

ノ解ト比較スルコトガ出来ル、$t \to \alpha+0$ ノトキ $Y=O(r(t))$ ヲ満足スル (4) ノ解ガ唯一ツデ、ソレヲ $Y=Y(t)$ トシタトキ $a<t<b$ デ $0<Y<B(t)$ トスル、キマッタ λ ノ値ニ対シテ (1) ガ $a<t<b$ デ $|y| \leqq Y(t)$ ヲ満足スル解ヲ少クトモ一ツ持ツコトハ存在定理ヲ知ッテ井ル人ニトッテハ明カナ事実デアル。

ソレハ勿論 $t \to \alpha+0$ ノトキ $y=O(r(t))$ ヲ満足スル、ソノ解ノ λ ニ関スル微分可能性ガ問題デアルカラ、ソノヤウナ解ガキマッタ λ ノ値ニ対シテ唯一ツニキマル場合ダケヲ考ヘルノハ当然デアラウ。

扨テ (2) ニ於テ

$$(5) \quad |f'_y(t,y,\lambda)| \leqq H_1(t), \quad |f'_\lambda(t,y,\lambda)| \leqq G_1(t)$$

トスル、$t \to a+0$ ノトキ $y=O(r(t))$ ヲ満足スル (1) ノ解ガ唯一ツニキマルタメノ條件ハ，$t \to a+0$ ノ時

$$(6) \quad \exp\left(\int H_1(t)\,dt\right) \neq O(r(t))$$

トナルコトデアル。

從ッテコレヲ假定スル、サウスレバ $y=O(r(t))$ 及ビ $|y|<B(t)$ ヲ満足スル (1) ノ解ハキマッタ λ ニ對シテ唯一ツ存在スルカラ、ソレテ $y=\varphi(t,\lambda)$ トスレバ，$\varphi(t,\lambda)$ ハ

$$(7) \quad a<t<b, \quad |\lambda-\lambda_0|<\gamma$$

デ定義サレ，連續デアル。

4. $f_y'(t,y,\lambda)$, $f_\lambda'(t,y,\lambda)$ ニ於テ $y=\varphi(t,\lambda)$

ト置イテ得ラレル (t,λ) ノ函数ヲ $h(t,\lambda)$, $g(t,\lambda)$ トスレバ $h(t,\lambda)$, $g(t,\lambda)$ ハ (7) デ連続デ (5) ニ依ッテ

$$|h(t,\lambda)| \leqq H_1(t), \quad |g(t,\lambda)| \leqq G_1(t)$$

ヲ満足スル、$z = \varphi'_\lambda(t,\lambda)$ ガ存在スルト假定スレバ、ソレハ

$$(8) \quad \frac{dz}{dt} = h(t,\lambda)z + g(t,\lambda)$$

ノ解デナケレバナラナイ、依テ(8)ト

$$(9) \quad \frac{dZ}{dt} = H_1(t)Z + G_1(t)$$

ヲ比較シタイ、ソレニハ (9) ガ $a < t < b$ デ連続デ負ノ値ヲ取ラナイ解ヲ持タナイトマヅイ、依ッテ (9) ガ $a < t < b$ デ負ノ値ヲ取ラナイ連続ナ解ヲ持ット假定スル。然ラバ $t \longrightarrow a+0$ ノ時

$$Z = o\left(\exp\left(\int H_1(t)\,dt\right)\right),$$

$a < t < b$ デ $Z > 0$ ヲ満足スル (9) ノ解ガ唯一ッ存在スル。(コレハ簡単ナ演習問題ノ程度デアル、証明ハ省ク)

此ノ唯一ッノ解ヲ $Z = Z(t)$ トスル、(8) ハキマッタ λ ニ対シテ $a < t < b$ デ連続デ $|z| \leqq Z(t)$ ヲ満足スル解ヲ唯一ッ持ッ、ソレヲ $z = \psi(t,\lambda)$ トスレバ、$\psi(t,\lambda)$ モ (7) デ連続デアル。以上述ベテ来タ假定ガアレバ $\varphi'_\lambda(t,\lambda) = \psi(t,\lambda)$ トナル。

コレニ依テ $\varphi(t,\lambda)$ ガ (7) ニ於テ λ ニ関シテ連続ナ偏導

函数ヲ持ツコトガ分ル。

5. (3), (5) ノ形ニ假定ヲ取ルトキ, $\varphi(t,\lambda)$ ガ λ ニ関シテ微分出来ルタメニ $H(t)$, $H_1(t)$, $G(t)$, $G_1(t)$ ガ満足スベキ十分ナ條件トシテ上ニ得タ所ノモノハ極ク自然ニ導入サレタモノデアルカラ、コレデ満足スベキ結果ニ達シタト見ラレル。

(3), (5) ト異ツタ假定ヲ取レバ話ガ違ツテ来ルコトハ言フマデモナイ、コノ結果ハ聯立微分方程式ノ場合ニ擴張サレルコトハ明カデアル. 証明ハ $\varphi'_\lambda(t,\lambda)=\psi(t,\lambda)$ ヲ示セバヨイノデ、ソレハ拙著, 北大紀要第5巻, 113—115頁ニ於ケルト同ジヤウニ出来ル。