683. Uniformly convex space ニ於ケル weak convergence

角谷　静夫（阪大）

S. Banach 及ビ S. Saks ハ L^p $(p>1)$ 空間ニ於テ点列 $\{x_n\}$ ガ一点 x ニ弱收斂スルトキ、x_n ノ適當ナ部分列 $\{x_{n_k}\}$ ヲ取レバ

$$\sigma_k = \frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots\cdots+x_{n_k}}{k}$$

ガ x ニ強收斂スルコトヲ證明シタ。[1]

然ルニ J. Schreier ガ直グソノ後デ示シタ如ク、[2] コレト同様ナ定理ハ連續函數ノ空間 C デハ成立シナイ。即チ $0\leq t\leq 1$ ニテ定義サレタ連續函數ノ系列 $\{x_n(t)\}$ ニテ常數 0 ニ弱收斂スルガ、如何ニ部分列 $\{x_{n_k}(t)\}$ ヲ取ツテモ

$$\sigma_k(t) = \frac{x_{n_1}(t)+x_{n_2}(t)+\cdots\cdots+x_{n_k}(t)}{k}$$

---

(1) S. Banach et S. Saks: Sur la convergence forte dans les champs L^p, Studia Math., 2 (1930).

(2) J. Schreier: Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz, Studia Math., 2 (1930)

ガ 0 ニ強收斂（一樣收斂）シナイモノガ存在スル。[3]

此ノ如ク $L^p (p>1)$ ニ於テ成立スル定理ガ C ニ於テ成立シナイノハ如何ナル原因ニ依ルノデアロウカ。

コレニ對シテ次ノ定理ガ一ツノ解答ヲ與ヘル。

定理。 uniformly convex ナ Banach space ニ於テハ點列 $\{x_n\}$ ガ一點 x ニ弱收斂スレバ適當ナ部分列 $\{x_{n_k}\}$ ニ對シテ

$$\sigma_k = \frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots\cdots + x_{n_k}}{k}$$

ハ x ニ強收斂スル。

---

(3) 更ニ Z. Zalcwasser ガソノ後ガ示シテヰル如ク、空間 C ニ於テモ x_n ガ x ニ弱收斂スルトキハ適當ニ Toeplitz ノ schema $\lambda_k^n (k=1,2,\cdots\cdots,n,\ n=1,2,\cdots\cdots)$ $(\lambda_k^n \geqq 0,\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots\cdots + \lambda_n^n = 1)$ ヲ取レバ

$$\sigma_n = \lambda_1^n x_1 + \lambda_2^n x_2 + \cdots\cdots + \lambda_k^n x_k$$

ハ x ニ強收斂スルノデアル。然ルニコノ定理ハ S. Mazur ニ依レバ一般ノ Banach 空間ガ成立スルノデアル。

Z. Zalcwasser: Sur un propriété du champ des fonctions continues, Studia Math., 2(1930)

S. Mazur: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math. 4(1933)

定理ヲ証明スル前ニ uniformly convex space ノ意味ヲ説明シナケレバナラナイ。コレハ J. A. Clarkson ニヨッテ導入サレタ概念デアル。(4) Banach space (ソノ norm $\|x\|$) ガ次ノ性質ヲ持ツトキ uniformly convex デアルト云フ。

(U) 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\delta(\varepsilon)>0$ ガ定マリ

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|\geqq\varepsilon \text{ ナラバ}$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqq 1-\delta(\varepsilon)$$ トナル。

J. A. Clarkson ハ Banach space ニ属スル値ヲ取ル函數ノ積分ニ関スル問題ニ際シテコノ考ヘヲ導入シタノデアル。(5)

Clarkson ハ $L^p\ (p>1)$ ガ uniformly convex デアルコトヲ示シテヰルカラ上ノ定理ハ Banach-Saks ノ結果ヲ含ムワケデアル。

定理ノ証明ヲスルタメニ上ノ條件 (U) ヲソレト同等ナ (U′) ニヨッテ置キカヘル。

(U′) 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\delta'(\varepsilon)>0$ ガ定マリ

$$\|x-y\|\geqq\varepsilon\cdot\mathrm{Max}(\|x\|,\|y\|) \text{ ナラバ}$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqq(1-\delta'(\varepsilon))\cdot\mathrm{Max}(\|x\|,\|y\|) \text{ トナル。}$$

---

(4) J. A. Clarkson: Uniformly convex space. Transaction of the Amer. Math. Soc. 40 (1936)

(5) 泉信一氏: 積分論 47 頁参照.

(U′)ニ於テ $\|x\|=\|y\|=1$, $\delta'(\varepsilon)=\delta(\varepsilon)$ トオケバ(U)トナルカラ(U′)ガ成立スレバ(U)ガ成立スルコトハ明カデアル。

次ニ、逆ニ(U)ガ成立スルトキハ適當ニ $\delta'(\varepsilon)$ ヲ取レバ(U′)ガ成立スルコトヲ示サウ。

先ヅ $\|x\|\geqq\|y\|$ ト假定シテモ差支ナイ。次ニ $\|x\|=\|y\|=0$ ナルトキハ明カデアルカラ $\|x\|>0$ ト假定シテモ差支ナイ。

更ニ $\|x\|>0$ デアレバ x, y ヲ夫々 $\dfrac{x}{\|x\|}$, $\dfrac{y}{\|x\|}$ ニヨツテ置キカヘレバ $\|x\|=1$, $\|y\|\leqq1$ ト假定シテモ一般性ヲ失ハナイコトハ容易ニワカル。

ヨツテ (U) ⟶ (U′)ヲ證明スル代リニ

(U″) 任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\delta''(\varepsilon)>0$ ガ定マリ

$\|x\|=1$, $\|y\|\leqq1$, $\|x-y\|\geqq\varepsilon$ ナラバ

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqq1-\delta''(\varepsilon)$$

トオキ、(U) →(U″)ナルコトヲ證明スレバヨイ。

(U)→(U″) ノ證明：

$\eta>0$ ヲ十分小サク $<\varepsilon$ ナル如クトリ(コノ大キサハ後デ定メル) $1\geqq\|y\|\geqq1-\eta$ ナルトキヲ考ヘル。

$z=y/\|y\|$ トオケバ $\|y-z\|=1-\|y\|\leqq\eta$ デアルカラ

$$\|x-z\|=\|x-y+y-z\|\geqq\|x-y\|-\|y-z\|$$
$$\geqq\varepsilon-\eta>0$$

ヨッテ $\|z\|=\|x\|=1$ ナルコトト (Ⅱ) トヨリ

$$\left\|\frac{x+z}{2}\right\| \leqq 1-\delta(\varepsilon-\eta)$$

コレヨリ

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+z}{2}+\frac{y-z}{2}\right\| \leqq \left\|\frac{x+z}{2}\right\| + \left\|\frac{y-z}{2}\right\|$$

$$\leqq 1-\delta(\varepsilon-\eta)+\frac{\eta}{2}$$

右辺 $1-\delta(\varepsilon-\eta)+\frac{\eta}{2}$ ハ η ヲ十分小サク取レバ（ε ハ固定）明カニ <1 トナルカラ、此ノ如キ η ヲ取リコレヲ η_0 トスル。

即チ　$1 \geqq \|y\| \geqq 1-\eta_0$ ナルトキハ

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq 1-\delta(\varepsilon-\eta_0)+\frac{\eta_0}{2} < 1$$

次ニ $\|y\| < 1-\eta_0$ ナルトキハ

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq \frac{\|x\|+\|y\|}{2} < \frac{1+1-\eta_0}{2} = 1-\frac{\eta_0}{2} < 1$$

ヨッテ常ニ $\|x-y\| \geqq \varepsilon$, $\|x\|=1$, $\|y\| \leqq 1$ ナラバ

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq \mathrm{Max}\left(1-\delta(\varepsilon-\eta_0)+\frac{\eta_0}{2},\ 1-\frac{\eta_0}{2}\right)$$

$$= 1-\delta''(\varepsilon) < 1$$

定理ノ証明：　$X=0$ ナルトキニ証明スレバ十分デアル。

$\{X_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ $X=0$ ニ弱収斂スルトセヨ。

$0.G\|X_n\| = M$　トオケバ　$M<\infty$ デアル。

先ヅ $\{X_n\}$ ヨリ部分系列 $\{X_{m_n}\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$
$(1<m_1<m_2<\cdots\cdots<m_n<\cdots\cdots)$ ヲ選ンデ

$$\left\| \frac{X_{m_{2n-1}}+X_{m_{2n}}}{2} \right\| \leqq \theta \cdot M \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

トナルヤウニスルコトが出来ルコトヲ示サウ。コヽニ

$$\theta = Max\left(\frac{3}{4},\ 1-\delta'\left(\frac{1}{2}\right)\right) < 1$$

ニテコレハ点列 $\{X_n\}$ 及ビ M ニハ無関係ナ常数デアル。
$m_1=2$ トオキ、$\|X_2\| \leqq \frac{M}{2}$ ナラバ $m_2=3$ トオク。

$$\left\| \frac{X_{m_1}+X_{m_2}}{2} \right\| = \left\| \frac{X_2+X_3}{2} \right\| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}+M\right)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot M \leqq \theta \cdot M$$

デアル。$\|X_2\| > \frac{M}{2}$ ナラバ $\|X_n - X_2\| > \frac{M}{2}$ ナル如キ最初ノ $n\ (>2)$ ヲ取リコレヲ m_2 トオク。

カヽル n が存在スルコトハ若シスベテノ $n>2$ ニ対シテ $\|X_n - X_2\| \leqq \frac{M}{2}$ トナレバ

$$\|X_2\| = \|X_2 - 0\| \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \|X_2 - X_n\| \leqq \frac{M}{2}$$

トナッテ矛盾スルコトヨクワカル。
カヽル m_1, m_2 ニ對シテハ

$$\|X_{m_1} - X_{m_2}\| > \frac{M}{2} \geqq \frac{1}{2} Max(\|X_{m_1}\|, \|X_{m_2}\|)$$

デアルカラ (U') ヨリ

$$\left\| \frac{X_{m_1}+X_{m_2}}{2} \right\| \leqq \left(1-\delta'\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot Max(\|X_{m_1}\|, \|X_{m_2}\|) \leqq \theta \cdot M$$

ヲ得ル。

次ニ $m_3 = m_2 + 1$ トオキ、m_1 カラ m_2 ヲ定義シタノト全ク同様ノ方法デ m_4 ヲ定義スル。コノ操作ヲツヾケレバ所要ノ部分系列ヲ得ルコトハ明カデアル。

今簡単ノタメ

$$X_n^{(1)} = \frac{X_{m_{2n-1}} + X_{m_{2n}}}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トオケバ O.G $\|X_n^{(1)}\| \leqq \theta \cdot M$ ニテ且ツ $\{X_n^{(1)}\}$ ハ $X = 0$ ニ弱収斂スル。ヨッテ $\{X_n\}$ カラ $\{X_n^{(1)}\}$ ヲ定義シタノト全ク同様ノ方法ニヨッテ $\{X_n^{(1)}\}$ カラ $\{X_n^{(2)}\}$ ヲ定義シテ、コレガ

$$X_n^{(2)} = \frac{X^{(1)}_{m'_{2n-1}} + X^{(1)}_{m'_{2n}}}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

$$1 < m'_1 < m'_2 < \cdots\cdots < m'_n < \cdots\cdots$$

トニノ形デ且ツ O.G $\|X_n^{(2)}\| \leqq \theta^2 \cdot M$ トナルヤウニスルコトが出來ル。$\{X_n^{(2)}\}$ ガ $X = 0$ ニ弱収斂シテ、且ツ各々ノ $X_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ最初ノ系列 $\{X_n\}$ ノウチノ相異ル4個ノ算術平均トナッテヰルコトモ明カデアル。

一般ニ系列 $\{X_n^{(p)}\}$ ガ既ニ定義サレコレガ

(i)$_p$ $\|X_n^{(p)}\| \leqq \theta^p \cdot M$, $\quad n = 1, 2, \cdots\cdots$

(ii)$_p$ $X = 0$ ニ弱収斂スル.

(iii)$_p$ $X_n^{(p)}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ何レモ最初ノ系列 $\{X_n\}$ ノウチノ相異ル 2^p 個ノ算術平均デアル。

ヲ満足シテヰルトキ、コレヨリ系列 $\{X_n^{(p+1)}\}$ ヲ定義シテコレガ

$$(\mathrm{i})_{p+1} \quad \|X_{n+1}^{(p+1)}\| \leqq \theta^{p+1} M, \quad n=1,2,\cdots\cdots$$

$$(\mathrm{iv})_{p+1} \quad X_n^{(p+1)} = \frac{X_{m_{2n-1}^{(p)}}^{(p)} + X_{m_{2n}^{(p)}}^{(p)}}{2}, \quad n=1,2,\cdots\cdots$$

$$1 < m_1^{(p)} < m_2^{(p)} < \cdots\cdots < m_n^{(p)} < \cdots\cdots$$

ヲ満足スルヤウニ選ブコトガ出来ル。$\{X_n^{(p+1)}\}$ ガ $(\mathrm{ii})_{p+1}$, $(\mathrm{iii})_{p+1}$ ヲ満足シテヰルコトハ $(\mathrm{ii})_p$, $(\mathrm{iii})_p$ 及ビ $(\mathrm{iv})_{p+1}$ ヨリ容易ニワカル。

$p=1,2,\cdots\cdots$ ニ對シテ系列 $\{X_n^{(p)}\}$ ガ定義サレタトキ x_1, $X_1^{(1)}$, $X_1^{(2)}$, $\cdots\cdots$ $X_1^{(p)}$, $\cdots\cdots$ ヲ考ヘヨウ。各々ノ $x_1^{(p)}$ ハ $(\mathrm{iii})_p$ ヨリ

$$X_1^{(p)} = \frac{X_{l_1^{(p)}} + X_{l_2^{(p)}} + \cdots\cdots + X_{l_{2^p}^{(p)}}}{2^p}$$

ト云フ形デ

$$1 < l_1^{(1)} < l_2^{(1)} < l_1^{(2)} < \cdots\cdots < l_4^{(2)} < l_1^{(3)} < \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots < l_{2^{p-1}}^{(p-1)} < l_1^{(p)} < \cdots\cdots$$

デアル。

コレヲ順次

$$n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K, \cdots\cdots$$

デ表ハス。即チ

$$n_1 = 1, \quad n_2 = l_1^{(1)}, \quad n_3 = l_2^{(1)}, \cdots\cdots, n_{2^p} = l_1^{(p)}, n_{2^p+1} = l_2^{(p)},$$

$$\cdots\cdots,\ n_{2^{p+1}-1} = l^{(p)}_{2^p},\ n_{2^{p+1}} = l^{(p+1)}_1,\ \cdots\cdots$$

トオク。コノ如ク定義サレタ n_k ニ對シテ $\{x_{n_k}\}$ ガ求ムル部分系列デアルコトヲ示サウ。即チ

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots\cdots+x_{n_k}}{k}\right\| = 0$$

ナルコトヲ示サウ。コノタメニハ任意ノ p_0 ニ對シテ

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots\cdots+x_{n_k}}{k}\right\| \leqq \theta^p\cdot M$$

トナルコトヲ示セバ十分デアル。

簡單ノタメ $x_{n_k} = y_k$ トオク。

$$q\cdot 2^p - 1 \leqq k < (q+1)2^p - 1$$

ナル k ヲトレバ

$$\begin{aligned}\|y_1+y_2+\cdots\cdots+y_k\| &\leqq \|y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{2^p-1}\|\\ &+\sum_{i=1}^{q-1}\|y_{i\cdot 2^p}+y_{i\cdot 2^p+1}+\cdots\cdots+y_{(i+1)2^p-1}\|\\ &+\|y_{q\cdot 2^p}+y_{q\cdot 2^p+1}+\cdots\cdots+y_k\|\end{aligned}$$

トナリ

$$\frac{1}{2^p}\left(y_{i\cdot 2^p}+y_{i\cdot 2^p+1}+\cdots\cdots+y_{(i+1)2^p-1}\right)$$

ハ明カニ $\{x^{(p)}_n\}$ ノ element デアルカラ

$$\begin{aligned}\|y_1+y_2+\cdots\cdots+y_k\| &\leqq (2^p-1)\cdot M\\ &+(q-1)\cdot 2^p\cdot\theta^p M+(2^p-1)M\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \left\| \frac{y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_k}{k} \right\| \leqq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{(q-1)\cdot 2^p}{k} \theta^p M$$

$$= \theta^p \cdot M$$

——（証明終）——