681. 雑　記 VIII

偏微分不等式ニ就イテ

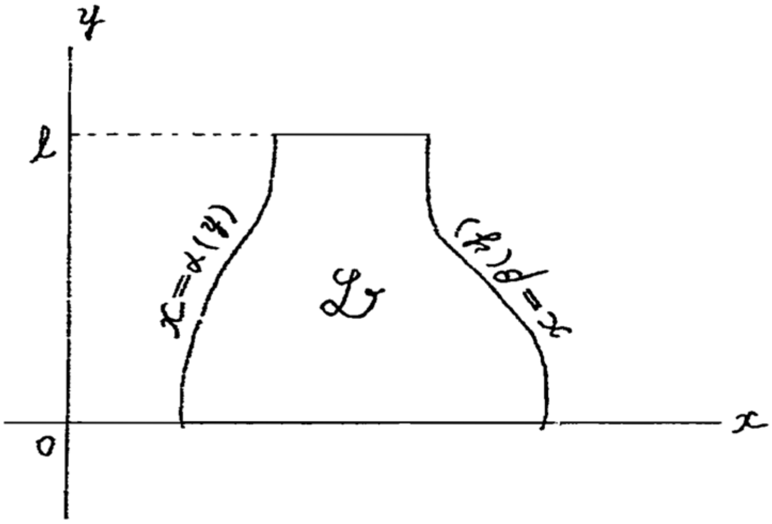
南雲　道夫（阪大）

$\boxed{1}$ 前号デ偏微分不等式ニツイテ書イタガ、平易ニ書イタツモリデアルケレドモ，急イデ走リ書ヲシタタメ、定理ノ内容ガ直観的ニピントコナイ恐レガアルカラ、特ニ x ノ数ガ只一ツノ場合ニツイテ述ベテ置カウ。

細カイ点デ、定理ノ適用範囲ヲ擴張スルタメニ定理ガ煩雑ニナルコトヲ避ケテ、條件ガ悪クトモ内容ノ見易イ形式ヲ述ベヨウ。

" $0 \leqq y \leqq l$, $\alpha(y) \leqq x \leqq \beta(y)$ ナル領域ヲ $\mathfrak{D}$ トヨブ〔 $\alpha(y)$, $\beta(y)$ ハ y ニツキ微分可能〕。

$u(x,y)$ 及ビ $v(x,y)$ ヲ $\mathscr{D}$ デ連続微分可能ナ函数，$f(x,y,u,p)$ ヲ $(x,y)\in\mathscr{D}$，$|u|<+\infty$，



$|p|<+\infty$ デ連続ナ函数トスル。

今 $\mathscr{D}$ ニ於テ

$$\frac{\partial u}{\partial y}\leqq f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial v}{\partial y}>f\left(x,y,v,\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

且ツ　$y=0$ デ　$u(x,0)<v(x,0)$

ガ成立シテ井レバ、$\mathscr{D}$ 全体デ $u(x,y)<v(x,y)$ デアルカ？"

上ノ問ニ對シテハ $\mathscr{D}$ ノ境界線 $x=\alpha(y)$ 及ビ $x=\beta(y)$ ニツキ $f(x,y,u,p)$ トノ間ニ次ノ不等式ガアレバ之レハ成立スル。

"$x=\alpha(y)$ ノ時

$$\frac{f(x,y,u,p')-f(x,y,u,p)}{p'-p}\geqq-\alpha'(y).$$

$x=\beta(y)$ ノ時

$$\frac{f(x,y,u,p')-f(x,y,u,p)}{p'-p}\leqq-\beta'(y).\ \text{"}$$

$\boxed{2}$ 特ニ $f(x,y,u,p)$ ガ p ニツキ <u>Lipschitz</u>

ノ條件

$$|f(x,y,u,p')-f(x,y,u,p)|\leqq A|p'-p|$$

ヲ満足シテキル場合ニハ，領域 $\mathfrak{D}$ ハ，$0\leqq y\leqq l$ 及ビ

$$\alpha+Ay\leqq x\leqq\beta-Ay \qquad (\alpha<\beta)$$

ニヨツテ定メラレタルモノトスレバヨロシイ。

例ヘバ　$u(x,y)$ ガ　$\alpha+Ay\leqq x\leqq\beta-Ay$ ニ於テ

$$\frac{\partial u}{\partial y}\leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|+B|u|+\delta \qquad (\delta>0),$$

且ツ　$u(x,0)\leqq \underline{M}$ トスルトキ，$\delta'>\delta$，$\underline{M}'>\underline{M}$ トシテ

$$v(x,y)=\underline{M}'e^{By}+\frac{\delta'}{B}(e^{By}-1)$$

トスレバ

$$\frac{\partial v}{\partial y}>A\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|+B|v|+\delta$$

且ツ　$v(x,0)>u(x,0)$.

故ニ　$y\geqq 0$，$\alpha+Ay\leqq x\leqq\beta-Ay$ ナル範囲デ

$u(x,y)<v(x,y)$.

ソコデ　$\underline{M}'\to\underline{M}$，$\delta'\to\delta$ トスレバ，

$$u(x,y)\leqq Me^{By}+\frac{\delta}{B}(e^{By}-1).$$

尚又　u ノ代リニ　$-u$ ヲ考ヘルコトニヨリ，結局

$$|u(x,y)|\leqq Me^{By}+\frac{\delta}{B}(e^{By}-1).$$

之レガ即チ Haar ノ不等式デアル。