674. 偏微分不等式ニ就イテ

南雲 道夫（阪大）

§ 緒 言

1928年ニ A. Haar ハ偏微分不等式

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + B|u| + \delta$$

ニ於テ $|u(x,0)| \leqq M \quad (\alpha \leqq x \leqq \beta)$ ナラバ $y \geqq 0$, $\alpha + Ay \leqq x \leqq \beta - Ay$ ナル範囲デ

$$|u(x,y)| \leqq M e^{By} + \delta(e^{By}-1)$$

ナルコトヲ基ニシテ, Cauchy 以来ノ Charakteristik ノ理論ヲ離レテ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ノ解ノ一意性ヤ, 之ガ境界條件及ビ $f(\quad)$ ト共ニ連続ニ変化スルコト等ヲ証明シタ (Atti del Congresso Internazionale dei matematici Bologna Tomo III, 5.—10.). 尚. J. Schauder ハ上ノ不等式ヲ基ニシテ Charakteristik ノ理論ヲ離レテ偏微分方程式ノ解ノ存在ヲ論ジテキル (Commentarii Math. Helvetici 9 (1936—1937) 263—283).

上ノ論文ハ最近ソノ存在ヲ知ッタバカリデ, 内容ハ未ダ讀ンデナイガ、之レニツケテ Perron ガ常微分方程式ノ

場合ニ微分不等式ヲ考ヘタヤウニ、一般ノ $f(x, y, u, u_x)$ ニツイテモ、

$$\frac{\partial v}{\partial y} > f(x, y, v, v_x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \leqq f(x, y, u, u_x)$$

及ビ $u(x, 0) < v(x, 0)$ カラ，$y > 0$ ナル適當ナ範圍デ

$$u(x, y) < v(x, y)$$

ガ證明出來ヌカト考ヘテ見タ。之レハ領域ノ境界及ビ $f(x, y, u, p)$ ニツイテ適當ナ條件（p ニ關シ Lipschitz ニ似タ條件）ガアレバ成功シタ。（x ノ數ガ多イ場合ニモ）

§ 本論

本論デモ細カイ條件ヲ嚴密ニ述ベルコトハ略シテオク。

$\mathfrak{L}$ ヲバ $n+1$ 次元ノ空間 $(x_1, \cdots\cdots, x_n, y)$ 内デ不等式

$$A \geqq y \geqq 0 \quad 及ビ \quad B^{\mu}(x, y) \geqq 0 \quad (\mu = 1, \cdots\cdots, m)$$

ニヨツテ定メラレタ有界ナ領域トスル。又 $[\mathfrak{L}]$ ヲバ $2n+2$ 次元ノ空間 $(x_1, \cdots\cdots, x_n, y, u, p_1, \cdots\cdots, p_n)$ 内ノ領域デ常ニ $(x, y) \in \mathfrak{L}$ ナルモノトシ，$f(x, y, u, p)$ ハ $[\mathfrak{L}]$ デ連續ナ函數トスル。

尚 $\mathfrak{L}$ ノ境界點ハイヅレモ高々 n 個ノ $B^{\mu} = 0$ ニ屬シ，ソノ點ヲ含ム $B^{\mu} = 0$ ニツイテハ微分形式 $\sum_{i=1}^{n} B_i^{\mu} dx_i$

$\left(B_i^{\mu}=\dfrac{\partial B^{\mu}}{\partial x_i}\right)$ ハ一次的ニ独立ナモノトスル。

$\boxed{\text{定　理}}$　$u(x,y)$，$v(x,y)$ ハ $\mathfrak{L}$ デ連続微分可能デ $u=u(x,y)$，$v(x,y)$，

$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\,,\ \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

ガ $[\mathfrak{L}]$ 内ニアルヤウナ函数トスル。

今 $u=v(x,y)$ 上ニアル $\mathfrak{L}$ ノ境界点 R ニ於テハ $\lambda_\mu\geqq 0$ ナルスベテノ λ_μ ニツキ

$$(1)\quad f(x,y,v,v_x)-f(x,y,v,v_x-\sum_{(R)}\lambda_\mu B_x^{\mu})\geqq\sum_{(R)}\lambda_\mu B_x^{\mu}$$

ガ成立スルモノトスル。［但シ $\sum\limits_{(R)}$ ハ R ガ属スルヤウナ $B^{\mu}=0$ ノ μ ニツイテノ加法ヲ意味スル。又 λ_μ ハ $p=v_x-\sum\limits_{(R)}\lambda_\mu B_x^{\mu}$ ガ $[\mathfrak{L}]$ ニ属スルモノダケデヨイ］

次ニ $u(x,y)$，$v(x,y)$ ニツイテハ $\mathfrak{L}$ デ

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial y}\leqq f(x,y,u,u_x),\quad \frac{\partial v}{\partial y}>f(x,y,v,v_x)$$

及ビ　$u(x,0)<v(x,0)$

ガ成立スルモノトスル。

シカラバ $\mathfrak{L}$ 内デ

$$u(x,y)<v(x,y).$$

（証明）充分小ナル y ニツイテハ明ラカニ

$$u(x, y) < v(x, y).$$

ソコデ帰謬法ヲ用ヒテ $\mathfrak{D}$ 全体デ之レガ成立ヲ証明スル。

上ノ不等式ガ成立シナイヤウナ y ノ最小ナ値ガアル。ソノ点ヲ (x_0, y_0) トスル。

先ヅ (x_0, y_0) ガ $\mathfrak{D}$ ノ内点ナラバ，$u(x_0, y_0)=v(x_0, y_0)$，$u(x, y_0) \leqq v(x, y_0)$ ヨリ，(x_0, y_0) デハ $u_x = v_x$

又 $$\frac{\partial u}{\partial y} \geqq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

之レハ不等式(2)ト矛盾スル。

次ニ $R=(x_0, y_0)$ ガ $\mathfrak{D}$ ノ境界点トシ、$\mu \in (R)$ ガ此ノ点ヲ含ム $B^{\mu}=0$ ノ μ ノ番号トスル。

$y = y_0$ 上デ (x_0, y_0) ヨリ $\mathfrak{D}$ ノ内側ヘノ微分 Vektor ハ

$$\sum_{i=1}^{k} B_i^{\mu} dx_i > 0.$$

之レニツイテハ $u(x, y_0) \leqq v(x, y_0)$ ヨリ

$$\sum_{i=1}^{k} (v-u)_{x_i} dx_i \geqq 0.$$

従ッテ $(v-u)_{x_i} = \sum_{(R)} \lambda_\mu B_i^{\mu}$ ナル $\lambda_\mu \geqq 0$ ガ存在スル。故ニ

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{(R)} \lambda_\mu B_i^{\mu}.$$

次ニ $\mathfrak{D}$ ノ境界点 (x_0, y_0) ヲ通リ $B^{\mu}=0$ 内ニアル

曲線 $x_i = x_i(y)$ ニ沿フテ考ヘレバ, (2), (1), (3) 及ビ

$$B_i^{\mu}\frac{dx_i}{dy}+B_y^{\mu}=0$$

ヨリ,

$$0 \geqq \frac{d}{dy}(v-u)_{x=x(y)}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}+\sum_i (v_{x_i}-u_{x_i})\frac{dx_i}{dy}$$

$$> f(x,y,v,v_x)-f(x,y,u,u_x)+\sum_i\sum_{(R)}\lambda_\mu B_i^{\mu}\frac{dx_i}{dy}$$

$$\geqq 0.$$

之レハ矛盾デアル。(証了)

§ 應 用

以上ノ方法ヲ特ニ

$$\frac{\partial u}{\partial y}\leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|+B|u|+\delta=f(x,y,u,u_x),\ (\delta>0)$$

ニ應用スレバ, $\mathfrak{D}$ ヲバ $0\leqq y$, $\alpha+Ay\leqq x\leqq\beta-Ay$ トシ,

$$v(x,y)=M'e^{By}+\delta'(e^{By}-1),$$

且ツ $\delta'>\delta$, $M'>M\ (>0)$ トスレバ

$$\frac{\partial v}{\partial y}>f(x,y,v,v_x)$$

之レカラ $u(x,0)\leqq M$ ナラバ, $\mathfrak{D}$ 内デ

$$u(x,y)\leqq M e^{By}+\delta(e^{By}-1)$$

ガ証明サレル。又 u ノ代リニ $-u$ ヲ考ヘルコトニヨリ結局

$$|u(x, y)| \leqq M\, e^{By} + \delta\, (e^{By} - 1)$$

ヲ得ル。