

673. *Osaka Tayori*, (I)

北川 敏男 (阪大)

別=、コレトイフ一定ノ目當ヲガアル譯デモナク、只、  
ソノ時マノ機縁ニ委セ、氣察ノ *ashaberu* ヲサセテ  
載クト有難イ。筆イキ口ガヒツテ、ツイ不作法、不謹慎ニ  
亘ツテモ、ドウカ大目ニミテ、御寛恕ノ程ヲ御願ヒ申シマス。  
----- ヲウソウ、今日ハ紙談ニ書クヨリハ又西ヘノ返事ヲサ

キ書カナケレバナラナカッタ。

1. X君、御無沙汰多謝。H. T. Davis 1 著書 *The theory of linear operations* ハ如何ダツタトノコトデシタネ。コノ本カ出テカラ、モウ一年半ニモナツテ遅レテ失敬。600 頁! 頁数ノ多イトイフ意味デノ大著デアレニハ違ヒアリマセン。書名ヲヨクミルト、小文字ヲ *from the stand point of differential equation of infinite order* ト遠慮シタマウニ小ナク断ツテキマス。

線型微分方程式、線型積分方程式ソウイッタモノハ吾々素人目ニテハ、相當マトマツテキル様デアスガ、一般ノ線型函数方程式論トナルト、對象ガ漠然トシテキルダケニ、ソレノ *Coordinating principle* ガ何処ニ求メタラヨイカ。難シイコトニナリ相対ト云ツテ君モ何日カ面白い話ヲシテクレマシタネ。

Davis ハ、*differential equation of infinite order* トイフ Bourlet 以來ノ、餘リ *modern* テイニ飛行機ニ乗ツテ *Birds-eye-view* フ書イテクレタノガコノ本ナラズガ、Davis 君ハ大イニ謙遜シテ、*the most promising field of investigation* ガ *indicate* サレルナラバ著者ノ *aims* ハ違ヒラレタト思フト述ベテキル。バラバラト本ヲメクツテ眺メラ、ヨク詭ノデナイカラ或ヒハ見當違ヒカモ知レナイケレド、Davis ノ言フコトハ例ノ目並文句

デナク、大ニ絶情ヲ吐露シタモノト思ハレル。

Bourlet 譲リテハ、ドウモ見抜カリが多い。今ココ  
デ自余ガ試ミシ敘述ハ自余ナガラ思ハシクナイ。diff. eq,  
of infinite order デウマク coordinate 出  
來ルトコロモアルガ、ソウデナイトコロモアル。Coordi-  
nate 出來ナイモノノウチ、或者ハ、ソレト話シノ似寄ッ  
タ Coord. シタモノノ脇ヘツケテオカウ。トモカク R. D.  
Carmichael 氏ノ言ハレル通り、コノ方面ハ未開地デ、  
マトマツト著述モナイ。だから、コレデモ將來ノ研究者ノタ  
メノ便宜ニハナルデアロウ ----- 遠イ米國デ Davis 君  
ガドウ思ツテキルカハ余ヲナイケレド、若シ、上ノヌヲ考  
ヘデ書イタトスレバ、コウシタ本ニナルノモ成程ト合点が行  
キ相ダ。

ツマリ、(1) theory of diff. eq of infinite  
order = ヌル Coordination ト (2) source  
book トシテ、reference book トシテ素材、原  
料ノ提供 —— コノニツガ本書ノ目指シタ所トスレバ、余  
リノウニ思ハレル。

2. X君、君モドウカ読ンデクレタマヘ。ソウサウ君ノ  
トコロニ由デスカラ、内容ノ紹介ヲシテオキマセウ。第  
一章カラ第十二章マデナカナカノ volume デス。

第一章ハ史的回顧。Operation, 心理學的檢討  
ニ始マル調子オラ、一寸近頃ノ數學書トハ違フデス。ソ  
シテ、ドウデス、Banachノ本々 Stoneノ本ガ流

行シテキル今日、並ニ書イテキル *Operation* ノ定義ナドハ前世紀モノデス。シカシ、コノ章ハ面白イ読物トシテ、興味本位ニ御覽ニナレバ結構。

巻末ノ文献ト相違ツテ、*Operation* ト名ノツクモノヲ、浅レナク記述セント意氣込ンガコトデセウ。コレハ *source book* ノ役ニ符合シイ。

第二章カラ第十二章マデノウチ、第三章ハ *The theory of linear systems of equations*, 第十ニ章ハ *The theory of spectra* ナ。Stone ヌ *Neumann* ノ著ノマル今日、不必要ナコトニモ思ハレル。Davis トシテハ百科辞典的責務ヲモ、買ツラ出タカラ、他ニ譲ルワケニ行カナイヌウナ氣ニナツタノデセウガ。トニ角記述ハアマリ *rigorous* デナイ。-----  
本書ノ骨子ハ残り9章ニ在ルワケデセウ。

3. X 君、大分 *Jayori* が長クナリマシタガ、コレカラガ本筋デス。僕達ノ問題ニシテキル函数方程式、例ヘバ

$$A. \int_a^b f(x+t) dg(t) = 0; \quad \text{或ハ} = g(x).$$

$$B. \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{\nu}(x) \int_a^b f(x+t) dg_{\nu}(t) = 0; \quad \text{或ハ} = g(x)$$

ナド、函数  $g(x)$ ,  $g_{\nu}(t)$  ( $\nu=0, 1, 2, \dots, \infty$ ),  $p_{\nu}(x)$  ナド與ヘラレタトキ  $f(x)$  ヲモトタル問題ハドウ解決ナレテキルカト思ツテ残り9章ヲメクツテミマシタ。

僕等トシテハ、無限階微分方程式ハ別ニ親譲リノ家寶デモ  
ナシ、タゞ僕等ノ役ニドレダケナルカギ問題ナシカ  
ラ。

*Theory of differential eq. of infinite  
order* ハ、コレヲノ問題ニ対シテ解答ヲ與ヘテクレテキル。  
-----ソノ話シノ前ニ *Bourlet* ノ定理トイフノガアツ  
テ、コレガコノ方面ノ出発点ニナツテキルコトヲ云ハナケレ  
バナラナイ。

*Bourlet* ノ函数方程式研究ハ「一價正則ナル函  
數ヲ一價正則ナル函数ニ transmute スル transmu-  
tation」ハ無限階ノ線型微分演算子トシテ表ハサレル  
トイフ定理ガ出発点デアアル。ソコデ、*diff. eq. of  
infinite order* へノ研究ハ、*Ritt*, *Perron*,  
*Sheffer*, *Valiron* ナドノ注意ガ向ケラレテ行ッ  
タ。コノ様ナ傾向ノ出発点ニナツタ *Bourlet* ノ定理ノ  
証明ハ如何ナラント、君モ氣ニナルヲセウガ、ソレガ第二章  
p. 99—105ニ述ベラレテキル。*transmutation*  
ノ意味、粗雑ナ言ヒ方ヲ敢テシタ上ノ定理ノヨク正確ナ *ex-  
pression* 等ハソレヲ参照シテクレ給ヘ。

4. *Generatrix* ガ登場シテクル。*Operation*  
ノ *Composition* ヲ *inversion* ガ *generat-  
ric* ノ間ノ関係トシテ *express* サレル。シカシ、僕  
ニハ、*Generatrix* ノ定義等ヒント来ナイ。

ソコデ、コウ考ヘテミテ行クコトニシマウ。  $e^{\lambda x}$  ナル

exponential function  $f(x)$  函数, ( $\lambda$  の parameter) トシテ、 $\Lambda$   $\neq$  operate シタトスル。  $\Lambda e^{\lambda x} = g(\lambda, x) e^{\lambda x}$  トカケルコトハ常ニ可能、 $e^{\lambda x} \neq 0$  ナラハカラ。ソウシタトキ  $g(\lambda, x)$   $\neq$   $\Lambda$ 、generatrix ト呼ブコトニシヨウ。

コレハ或ル範圍ノ  $\lambda, x$  ニ関シテノニ定義サレルノガ一般デセウ (サテニ一般ニハ、 $e^{\lambda x}$  ハ  $\Lambda$  ノ domain ニ屬セヌ場合モアリマセウ。タトヘバ  $L^2(-\infty, \infty)$   $\neq$  realized シタ Hilbert 空間。ソウイフ場合ハ今若ヘナイコトニシテ)。Generatrix ノ例トシテ、 $\Lambda$  ガ (i) 微分演算, (ii)  $x$   $\neq$  カケルトイフ所謂 Multiplication, (iii) Superposition 即チ  $f(\lambda(x))$   $\neq$  ツクルコト, ( $\lambda(x)$  given) ナラハ、generatrix ハ夫々 (i)  $\lambda$ ; (ii)  $x$  (iii)  $e^{(\lambda(x)-x)\lambda}$  トナルヲケ。カカラ、 $g(\lambda, x)$  ハ ( $\lambda, x$ ) ノ 函数デアラダケテ、解析的ニハ全ク任意デアリウレヲケデセウ。

シカレニ、diff. eq. of infinite order  $\neq$  論ズルノハ、( $\lambda, x$ ) ニ変數ニ関シテノ正則函数デアツテ、適當ノ範圍ヲ

$$(1) \quad g(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \lambda^n \quad \left( \begin{array}{l} a_n(x) \text{ ハアル範圍} \\ \neq \text{一價正則} \end{array} \right)$$

トシテ表ハサレル場合ノミガ問題ニナル。コレヲ Operation = 翻譯シテ考ヘルトキ、formally

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) f^{(n)}(x)$$

ナル Operation が對應スルト考へルノハ當然デアル  
 が、コレヲ、實際 transmutation = ヲイテ証明  
 シタノガ Bourletノ定理ト思へべきイラシイ。

Chap. IV デハ、Operational Multiplication and inversionノ題ノモトデアロイロナ  
 コトガ論ぜラレテキルガ、本論ノ筋道即チ第一ノ目標カ  
 ラ云フト  $\Lambda$ ノ generatrix  $g(\lambda, x)$ 、他ノ Operation  
 $\Gamma$ ノ generatrix  $h(\lambda, x)$ トスルトキ、 $\Lambda\Gamma$ ノ  
 generatrixヲ求めテキルトコロ (p. 155-156)ガ要  
 点イラシイ。ソレハ

$$(3) h(\lambda, x)g(\lambda, x) + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \lambda} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} + \dots$$

トナルカトイフコトマス (失礼、Notationガ Davis  
 ノト違ッテ了ッテ、謝々) —— 証明ハ横読ンデナイ。

コノ定理ノ使ヒ途ハ  $g(x)$ ヲ與ヘテ次ノ函数方程式

$$(4) \Gamma f(x) = g(x)$$

ヲ満足スル  $f(x)$ ヲ求めヨトイフヤウナ場合、(3) = 1トオ  
 イテ、ソレヲミマス  $g(\lambda, x)$ ヲモトメル。コレハ(2)ナル  
 形デアラハキレテ、 $\Lambda g(x)$ ヲツクレバ、(4)ト解 = ナ  
 ル-----。

formal +、餘リ = formal + 理論。時代遅レ。

シカシ、何トカシテ、コレヲ *rigorous* = 基礎付ケ  
 ラレハシマイカ。 *formalism* ハ、粗末ニミラレテキル  
 ケレドモ、シカシ、コレヲ活カシテ行カナケレバ、余リノヨ  
 イ理論ハ由レテユナイダロウ。----- 餘敬ハ失礼、失礼。  
 「ルール」ノ補強、ドウゾス、君レツマツテクレマセン  
 カ。

5. X 君、トモカク (1) ナル展開 = 對應サセテ、(2) ナル  
*operation* ヲ着ヘテ行ク。ソレガ *diff. eq. of in-*  
*finite order* ノ建前ナリダカラ、コレカラノ針路ハド  
 ヲナルカ、想像 = 困難デナイデセウ。

□ 第一ニ、 $a_n(x) \equiv a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ナ  
 ル場合、即チ常係数ノ場合。コノトキ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

ハ或ル田内デ正則ナコトモアラウツ。整函数ナコトモア  
 ロウ。トニカク、一價正則ナモノガ *Bourlet* ノ定理ニエラ  
 レル *operation* ノウチカラエラレル。シカシテ之レニ對  
 應スル *operation* ハ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z)$$

ト着ヘルコトニナルデアロウコト、想像通りニ進ンテ行ク。  
 コノ *operation* ハ *differentiation* ト可換ナ  
*operation* ナラス。ソレハ  $g(\lambda, x)$  ガ  $\lambda$  ノミノ函  
 数デアルトイフ意味デ  $\Delta$  ハ微分演算ノ函数ト云フコトニス



ルト、 $D$ ノ多價函数、特 = *Logarithm* トナドモ考ヘラレナイカ  
ト云フコトニナルガ-----コレヲノコトヲ述ベタノガ *Chapter VI* デアル。  
*chapter VII* = ハ *Heaviside calculus* ガ書カレテキル。

[2] 次 =  $n$ ,  $a_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,N}x^N$   
( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) デアツテ  $N$  ハ 元 = 無關係 + 自然数  
ノトキ。コレハ *Laplace* 型ト云ハレル。Davis ノ  
*Arbeit* ラモツテ書カレタノガ *Chap. VIII* デアル。(コ  
ノ注意シタイノハ、Davis ノ方法 = *resolvent function*  
*of infinite grade* モ論ジラレルコトデアル)

コレハ次ノヤウ + *analogy* ヲ述ツタト思ヘル宜シ  
カロウ。

有限階微分方程式	無限階微分方程式
常係数	常係数 (線状移動可能函 数方程式) 或ル場合ヲ含 ム。
<i>polynome</i> ヲ係数ト スルモ)	<i>Laplace</i> 型

コウシタ *analogy* ハ更 = 続ケラレル。曰ク

*Chap. IX*: *Generalised Euler differential eq. of infinite order*; 曰ク *Chap. X*:  
*Differential eq. of infinite order of*

fuchsian type.

Chap. XI モ コソナ 調子 デセウ。

6. X君. Davis 君ノ 内容ノ 話シハ エレダケニスル。  
ソコデ 概等ノ 問題トシタ (A), (B) ナドハ ドウイフ 風ニ 論ゼラレ  
ルカ、ソレハ コウ デス。

$$(A) \int_0^1 f(x+t) dg(t) = g(x) \text{ ナル 函数方程式ハ}$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_0^1 t^n dg(t) = g(x)$$

= reduce スルコト = ヱ ツテ  $\square$  ノ 場合 = 入ル。

(B) デ 特ニ、 $f(x)$  ガ スマテ *polynome* ナラバ、同  
様ナ 方法デ *Laplace* 型ニ 入ルコト = ナラマス。

餘リ 粗雑 デスガ 上ノ 方程式デ 與ヘラレタスルノ 範圍ガ 問題  
デアル。シカシ、ソレハ  $-\infty < x < \infty$  デ アツテモ  $a < x < b$   
(有限區間) デ アツテモ、 $f^{(n)}(x)$  ノ 大サニ 關シテ 適當ナ  
條件ガ アレバイヘル。

若シ、(A) = (5) デ 表ハサレルタメノ 條件ガ 與ヘラレテ  
ナイヌウナ 解  $f(x)$  ヲ 問題トスレバ、ドウナルカ。暗カニ、  
*diff. eq. of infinite order* ハ 適當出來ナイ。  
タトヘ、(5)ノ 左辺ノ 級數ハ 一樣收斂デナク、何方 *sum-*  
*mability* ヲ 用ヒタトシテモ、ソレデモ、ソレハ 程度ノ  
差デアル。

ソノ 事ハ モツト 簡單ナ 例

$$(6) f(x+1) - f(x) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

ヲトツテ考ヘルトヨリ分リヌス。コレハ、例ヘバ  $[0, 1]$  デ定義サレタ全ク任意ノ函数  $f, (x)$  ヲアタヘルトキ、

$$(7) \quad f(x) = f_1(x) \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{デ}$$

且ツ (6) ヲミタヌヌウチ  $f(x)$  ハ常ニ存在スル、( $f_1(x) =$  *periodic prolongation* ヲ施セバソレデヨイ。) イハバ、長サノヨリ小ナ (シカシ、 $1 =$  イクラアモ近クトモカマワナイ) 區間ヲアタヘルトキ、ソコニ於テ勝手ナ値ヲトル解が存在スル。

コレハ有限階微分方程式トハ、大イニ趣ヲコトニスル。無限階微分方程式ノ現状ヲ以テシテハ、コウシタ事情ハ分ラナイ。函数方程式ヲ解クノが目的トスレバソレハ大キナ不満ヲアルト云ハナケレバナラナイ。

話シノ序カカラ、脱線ヲ許シ給ヘ。コウシタ自由度ハ何ニ *difference eq.* = カギツタワケデハナイ。

コウシタ自由度ハ、實ハ

$$(8) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}_r} \left| \frac{e^{g\lambda}}{e^\lambda - 1} \right| |d\lambda| = O(1)$$

ナル關係ガ、 $\varepsilon_0$  ヲ如何ニアタヘルモ、適當ニエラシク  $\{\mathbb{C}_r\}$  *contours* ノ *sequence* = 對シテ  $\varepsilon \leq g \leq 1 - \varepsilon$  ナル  $g =$  關シテ一様ニ成立スルトイフコトカラ *follow* スル事實ダカラデ、(A) ノ左辺ノ *operation*  $\int_a^b f(x+t) dg(t) =$  ツイテソノ母函数  $\int_a^b e^{\lambda t} dg(t)$  ヲバ、上式  $e^\lambda - 1$  ノ場所ニオクトキ、云ヘ

ルナラバ、同様に性質ヲセツ。

ソレヲ模ハ  $O$ -association ト指報ヲ書イタケ  
レド、長カノ自由幅ヲキツト云ツタ方カ適切デアツタカ  
モ知レナイ。

7. X 氏、コウナツテミルト。 *diff. eq. of in-*  
*finite order* ヲ有難ガル訳ニハ行カナイネ。 R. D.  
Carmichael 學長殿ハ "relatively unexplored  
domain, the importance of which will  
certainly be more fully recognised  
as the subject is further developed  
in the next two or three decades"  
ト仰言ツテキルガ。(R. D. Carmichael *Linear*  
*differential eq. of infinite order.*  
*Bull. Am. Math. Soc.* 4.2 (1936)).

ソレハ、(A), (B) ヲ含ム線型函数方程式論ノ重要ナ  
ヲ意味スルモノデアレバナルマイ。コレカラ、発展シテ行  
ツタトキ、*diff. eq. of infinite order* ハド  
ンナ位置ヲ占メルカ、ソレハ見物デアロウ。問題ハ、吾々ノ  
場合ニハ、*given* サレヲキル。ソレヲ攻撃スル方法ガ  
問題ガ。駄目ナ方法ハサテリト西ノ海ヘ捨テテ出直スコト  
ガ。

Davis ノ本ヲ読ンテ *diff. eq. of infinite*  
*order* ノ前途洋々アリト思フ人ハナイデセウ。トニカク出  
直スコトデアル。Davis ノ本ニハイロイロナ例題ガ澤山ア

ツテ何か新シイ思付がアツタ様ナトキニハ、ソレデハソノ方法デコノ例題ニ當ツテミルトドウナルカトイッタ工合ニ、云ハバ練習帖トシテ使ヘソウダ。

Davis ノ本ニ Valiron ノ方法 (ソノ重要性ハ大ナル。R. D. Carmichael 参照) ガナイ。又 Difference eq. ガノセテナイ。コレハヨク開拓サレタ branch トシテ omit シタノデアロウカ。シカシ、Nörlund ノ *Hauptlösung* ノ考ヘハ (A) ナル函数方程式ニモ拡張サレル。ソウシタ特有ノ味ヲ盛ラナクテハ、面白味モナイコトニナルデハナイカ。單ナル *übertragung* ハ數學者ノ演習問題ニ過ヤナイ。

又君、最後ニ君ノ御健康ヲ祈ル。新年早々乱雑ナ *Jayori* ハ至極迷惑カモ知レナカッタケレド永々ノ御約束デシタカラ。君ハコレヲ読ンデ多大ノ疑問ト混雜トヲ感ゼラレルコトデアロウ。コウシタ疑問ヲ健實ニ育テ上げ、混迷ヲ切り拓イテ行クコトハ、コレカラノ問題デ、ソノ解決ハ、吾々ノ望ンデ止マストコロデアル。 *generatrix* ノトリ扱ヒ、ソレニツイテハ、又近イウチニ愚見ヲ御知ラセ申上げマス。