667. Haar ノ measure ニ就イテ, II

角谷　静夫（阪大）

最初ニ前号ノ誤リヲ訂正スル。

前号ノ最後347頁ノ下ヨリ7行目以下ヲ次ノ如ク訂正スル。

「μ ノ total variation $\bar{\mu}$ ヲ考ヘル。$\bar{\mu}$ ハ任意ノ Borel 集合ニ對シテ $\bar{\mu}(E)=\mu(E\cdot P)-\mu(E\cdot N)$ ニヨツテ與ヘラレル。$\bar{\mu}$ ハ totally additive, left-invariant, non-negative デアリ、且ツ任意ノ $a\in G$ ニ對シテ $\bar{\mu}(P\dotplus aP-P\cdot aP)=0$ トナルカラ G ガ ergodic ナリトノ假定ヨリ $\bar{\mu}(P)=0$ 又ハ $\bar{\mu}(G-P)=\bar{\mu}(N)=0$ トナラネバナラナイ。然ルニ他方 $\mu(E_1)>0$, $\mu(E_2)<0$ ナル如キ Borel 集合 E_1, E_2 ガ存在スルコトヨリ

$$\bar{\mu}(P)\geqq\bar{\mu}(E_1\cdot P)\geqq\mu(E_1)>0,$$

$$\bar{\mu}(N)\geqq\bar{\mu}(E_2\cdot N)\geqq-\mu(E_2)>0$$

トナルカラコレハ矛盾デアル。ヨツテ G ノ left-invariant ナ measure ハ unique デナケレバナラナイ」

コレデ證明ハ終ルノデアルガ、ココニ注意スベキハ $\bar{\mu}$ ガ

必ラズシモ open set ニ對シテ正トナラヌコトデアル。ヨツテ ergodic ノ定義ニ於ケル measure μ ニ對シテモ、open set ニ對シテ正トナルコトヲ假定シナイコトニスル。コノヤウナ μ ニ對シテモ (I) ノ証明ガソノママ成立スルコトハ明カデアロウ。（然シナガラ一般ニ measure ト云ヘバ open set ニ對シテ正トナルモノヲ考ヘル）

次ニ locally bicompact ナ topological group ニ對スル Haar ノ measure ノ uniqueness ヲ証明スル。コノ場合ハ、一般ニ group ハ separable デナイカラ、G全体ヲ前ト同様ノ方法デPトNトニ分ケルコトガ出來ナクナル。ソレデ仕方ガナイカラ bicompact ナ範囲ダケヲ考ヘルノデアル。

G ヲ locally bicompact ナ topological group トセヨ。G ノ left-invariant ナ measure ガ unique デナケレバ前ト同様ニシテ、二ツノ left-invariant ナ measure μ_1, μ_2, 二ツノ Borel set E_1, E_2 ($\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ ガ何レモ bicompact ニナルモノ) 及ビ real number α ガ存在シテ

$\mu_1(E_1) > \alpha\mu_2(E_1)$, $\mu_1(E_2) < \alpha\mu_2(E_1)$ トナル。

今 E_1, E_2 (U, $U^{-1} = U$, $\overline{U}$ ガ bicompact ナル如キ開集合 U ヲ考ヘル。カヽル U ハ G ガ locally bicompact ナルコトヨリ必ズ存在スル。$\overline{U}$ ガ bicompact ナルコトヨリ $\overline{U^3}$ ハ又 bicompact デア

ル。

($\mho^n$ ハ $X = x_1 x_2 \cdots\cdots x_n$, $x_i \in \mho$, $i = 1, 2, \cdots, n$ ナル如キ点X全体ノ集リデアル。) ヨッテ $\mho^3$ ハ $\mu = \mu_1 - \alpha\mu_2$ ナル totally additive ナ set-function ニ関シテ positive part P ト negative part N トニ分タレル。

又 μ ノ total variation $\bar{\mu}$ ハ $E \subset \mho^3$ ナル Borel 集合 E ニ對シテ $\bar{\mu}(E) = \mu(E \cdot P) - \mu(E \cdot N)$ ニヨッテ與ヘラレル。

コノ P 及ビ $\bar{\mu}$ ガ任意ノ $a \in \mho^2$ ニ對シテ

$$\bar{\mu}((P + aP - P \cdot aP) \cdot \mho) = 0$$

ヲ満足シテヰルコトヲ証明シヨウ.

$$P + aP - P \cdot aP = (P - P \cdot aP) + (aP - P \cdot aP)$$

デアルカラ

(i) $\bar{\mu}((P - P \cdot aP)\mho) = 0$

(ii) $\bar{\mu}((aP - P \cdot aP)\mho) = 0$

ヲ証明スレバ十分デアル。

(i) ノ証明: 先ヅ $(P - P \cdot aP) \cdot \mho \subset P$ ナル故

$$\bar{\mu}((P - P \cdot aP) \cdot \mho) = \mu((P - P \cdot aP) \cdot \mho) \geqq 0$$

次ニ $(P - P \cdot aP) \cdot \mho \subset \mho - aP \cdot \mho \subset a\mho^3 - aP = aN$

ナル故 $\mu((P - P \cdot aP) \cdot \mho) \leqq 0$

$$\therefore \quad \bar{\mu}((P - P \cdot aP) \cdot \mho) = 0$$

(ii) ノ証明: 先ヅ $(aP - P \cdot aP) \cdot \mho \subset aP$

ナル故 $\mu((aP - P \cdot aP) \cdot \mho) \geqq 0$

次ニ $\quad (aP-P\cdot aP)\cdot \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}-P\cdot\mathfrak{U}\subset\mathfrak{U}^3-P=N$

ナル故 $\bar{\mu}\big((aP-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U}\big)=-\mu\big((aP-P\cdot aP)\cdot\mathfrak{U}\big)\geqq 0$

$\therefore\quad \bar{\mu}\big((aP-P\cdot aP)\mathfrak{U}\big)=0$

ヨツテ P ノ *characteristic function* ヲ $\varphi(x)$

トスレバ

$$\int_{\mathfrak{U}}\Big|\,\varphi(x)-\varphi(ax)\Big|\,d\bar{\mu}(x)=0$$

ガ任意ノ $a^{-1}\in\mathfrak{U}^2$ （コレハ $a\in\mathfrak{U}^2$ ト同等）ニ對シテ成立

スル。即チ任意ノ *measure* $\lambda(a)$ ニ對シテ

$$\iint_{\mathfrak{U}\times\mathfrak{U}^2}\Big|\,\varphi(x)-\varphi(ax)\Big|\,d\bar{\mu}(x)\,d\lambda(a)=0$$

コヽデ $\lambda(a)$ トシテ *right-invariant* ナ *measure*

ヲ取ル。

Fubini ノ定理ヨリ $\mathfrak{U}\supset M_0$, $\bar{\mu}(M_0)=0$ ナル集合

M_0 ガ定マリ

$$\int_{\mathfrak{U}^2}\Big|\,\varphi(x)-\varphi(ax)\Big|\,d\lambda(a)=0$$

ガ $x\in\mathfrak{U}-M_0$ ニ對シテ成立スル。即チ、$x\in\mathfrak{U}-M_0$ ナ

ル各々ノ x ニ對シテ λ-*measure zero* ナ集合 E_x ガ

定マリ $a\in\mathfrak{U}^2-E_x$ ナルトキ $\varphi(x)=\varphi(ax)$、又ハ

$z\in(\mathfrak{U}^2-E_x)\cdot x$ ナルトキ $\varphi(x)=\varphi(z)$. 然ルニ $x\in\mathfrak{U}$

ナルトキ $\mathfrak{U}^2x\supset\mathfrak{U}$ デアルカラ $z\in\mathfrak{U}-E_x\cdot x$ ナルトキ

$\varphi(x)=\varphi(z)$.

同様ニ任意ノ $y\in\mathfrak{U}-M_0$ ニ對シテ λ-*measure* zero ナ集合 E_y ガ定マリ $z\in U-E_y\cdot y$ ナルトキ $\varphi(y)=\varphi(z)$. 然ルニ $\lambda(U)>0$, $\lambda(E_x\cdot x)=\lambda(E_y\cdot y)=0$ デアルカラ $z\in U-E_x\cdot x-E_y\cdot y$ ナル z ガ存在スル。ヨッテ $\varphi(x)=\varphi(y)$. 即チ $\varphi(x)$ ハ $U-M_0$ ニテ constant. ヨッテ $\bar{\mu}(P\cdot U)=0$ 又ハ $\bar{\mu}(U-P)=0$.

然ルニ他方 $\mu(E_1)>0$, $\mu(E_2)<0$, $E_1, E_2\subset U$ ナル Borel 集合 E_1, E_2 ガ存在シタカラ $\bar{\mu}(P\cdot U)\geqq\bar{\mu}(P\cdot E_1)\geqq\mu(E_1)>0$, $\bar{\mu}(U-P)\equiv\bar{\mu}(N\cdot U)\geqq\bar{\mu}(N\cdot E_2)\geqq-\mu(E_2)>0$ トナラネバナラナイ。コレハ矛盾デアルカラ G ノ left-invariant ナ measure ハ unique デナケレバナラナイ。

——(証明終)——

〔注意〕 コノ証明ノ最後ノ部分ハ次ノゴトクスルコトモ出来ル。(コノ方法ハ深宮氏ニ教ヘテイタダキマシタ) $x\in U-M_0$ ニ對シテ成立スル式

$$\int_{U^2}|\varphi(x)-\varphi(ax)|\,d\lambda(a)=0$$

ヨリ

$$\int_{U^2}\varphi(x)|\varphi(x)-\varphi(ax)|\,d\lambda(a)=0$$

$$\varphi(x)\int_{U^2}(1-\varphi(ax))\,d\lambda(a)=0$$

λガ right-invariant デアルカラ

$$\varphi(x)\int_{U^2x}(1-\varphi(a))\,d\lambda(a)=0$$

$x \in \mathfrak{U}$ ナルトキ $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}^2 x$ ナル故

$$\varphi(x)\int_{\mathfrak{U}} (1-\varphi(a))\, d\lambda(a) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

同様ニ $\varphi(x)$ ヲカケル代リニ $\varphi(ax)$ ヲカケレバ

$$(1-\varphi(x))\int_{\mathfrak{U}^2} \varphi(ax)\, d\lambda(a) = 0$$

$$(1-\varphi(x))\int_{\mathfrak{U}} \varphi(a)\, d\lambda(a) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) ハ $x \in \mathfrak{U} - M_0$ ニ對シテ成立スル。

然ルニ

$$\int_{\mathfrak{U}} (1-\varphi(a))\, d\lambda(a) + \int_{\mathfrak{U}} \varphi(a)\, d\lambda(a) = \int_{\mathfrak{U}} d\lambda(a) = \lambda(\mathfrak{U}) > 0$$

デアルカラ

$$\int_{\mathfrak{U}} (1-\varphi(a))\, d\lambda(a), \quad \int_{\mathfrak{U}} \varphi(a)\, d\lambda(a)$$

ノウチ少クトモ一ツハ正デナケレバナラナイ。ヨツテ(1)又ハ(2)ヨリ $\varphi(x) \equiv 0$ 又ハ $\varphi(x) \equiv 1$ （$x \in \mathfrak{U} - M_0$）ヲ得ル。