665. 一階常微分方程式ノ特異點ニ就イテ, XVI

福原 満洲雄 (九大)

1. 微分方程式

$$(1)\quad \frac{dy}{dt} = y f(t, y, e^{pt} y^{-1})$$

ニ於テ $f(t, y, z)$ ハ

$$(2)\quad f(t, y, z) = \sum_{jkl} a_{jkl} e^{jt} y^k z^l$$

ナル形ニ展開サレルトスル. $z = e^{pt} y$ ト置イテ得ラレル.

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y f(t, y, z) \\ \dfrac{dz}{dt} = z\{p - f(t, y, z)\} \end{cases}$$

ノ形式的ノ解トシテ

$$(4)\quad \begin{cases} y \sim u \sum\limits_{jkl} p_{jkl} e^{jt} u^k v^l \qquad (p_{000} = 1) \\ z \sim v \sum\limits_{jkl} q_{jkl} e^{jt} u^k v^l = v\left(\sum\limits_{jkl} p_{jkl} e^{jt} u^k v^l\right)^{-1} \end{cases}$$

ヲ得ル、茲ニ u, v ハ

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a u^{n+1} + a' u^{2n+1} \qquad (a = a_{0n0} \\ \dfrac{dv}{dt} = v(p - a u^n - a' u^{2n} \end{cases}$$

ノ解デアツテ

$$
(5)\quad \begin{cases} u=\left(\dfrac{a'}{a}\alpha\left(-\dfrac{na^2}{a'}(t+c)\right)\right)^{-\frac{1}{n}} \\[2ex] v=c'e^{\rho t}\left(\dfrac{a'}{a}\alpha\left(-\dfrac{na^2}{a'}(t+c)\right)\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases}
$$

ト表サレル。以上ハ前回述ベタ所デアル。

2. 次ニ (4) ヲ漸近展開トスル (3) ノ解ノ存在デアルガ証明ノ方針ハ常ニ同一デアルカラ簡單ニ述ベテ置ク。

$\sum_N$ デ $j+k+l<N$ デアルヤウ (j,k,l) ニ就テノ和ヲ表スコトニシ,

$$
\begin{cases} P_N(x,u,v)=\sum_N p_{jkl}x^j u^k v^l \\ Q_N(x,u,v)=\sum_N q_{jkl}x^j u^k v^l \end{cases}
$$

ト置キ，更ニ

$$
y=P_N(e^t,u,v)+Y,\qquad z=Q_N(t,u,v)+Z
$$

ト置イテ Y, Z ニ關スル方程式ニ解ノ存在，單独性，微分可能性ニ關スル定理ヲ應用スルコトハ例ノ如シデアル、其ノ結果 (4) ヲ漸近展開トスル (3) ノ解ノ存在ガ分レバカリデナク，收斂性モ出來ル、尤モ (4) ノ右辺ガ收斂ニナルノデハナイ、ソレハ一般ニ發散デアル。

3. 級數 (2) ガ收斂ナルトキ，モット詳シク言ヘバ $f(\log x, y, z)$ ガ (x,y,z) ノ函數ト考ヘテ $(0,0,0)$ デ正則ナルトキ，(3) ノ一般解ヲ x, u, v ノ函數ト考ヘテ（一般解ハ t, c, c' ノ函數デアルカラ，$t=\log x$ 及ビ (5) ニ依テ x, u, v ノ函數ト考ヘルコトガ出來ル）x, u ノ收斂ナ

冪級數ニ展開サレル：

(6) $$y=u\sum p_{jl}(u)x^j v^l,\quad z=v\sum q_{jl}(u)x^j v^l,$$

而シテ、$p_{jl}(u)$, $q_{jl}(u)$ ハ漸近的ニ

(7) $$p_{jl}(u)\sim\sum_k p_{jkl}\,u^k.\quad q_{jl}(u)\sim\sum_k q_{jkl}\,u^k$$

ナル形ニ展開サレル、コノ級數ハ $j=l=0$ ノトキハ收斂デアルガ，其他ノ場合ニハ一般ニ收斂シナイ。ソレデアルカラ u ガ勝手ナ路ニ沿ッテ 0 ニ近ヅイタトキ漸近展開 (7) ガ成立スルトイフノデハナイ、此ノ漸近展開ガ成立スルタメニハ u ガ或ル條件ニ從ッテ 0 ニ近ヅカナケレバナラナイ、ソノ條件ハ

$$-\frac{3\pi}{2n}+0<\arg\left(a^{\frac{1}{n}}u\right)<\frac{3\pi}{2n}-0,\quad u\to 0$$

デアル、コレハ

$$-\frac{3\pi}{2n}+\varepsilon<\arg\left(a^{\frac{1}{n}}u\right)<\frac{3\pi}{2n}-\varepsilon,\quad u\to 0$$

ニ於テ正ノ數 ε ハ幾ラデモ小サク取レルトイフ意味デアル。

4. 今度ハモ少シ假定ヲ緩メテ

(8) $$f(t,y,z)=\sum_{k,l}a_{kl}(t)\,y^k z^l$$

ガ

$$\underline{\theta}\leqq\arg t\leqq\overline{\theta},\ -\Re t\geqq R,\ |y|\leqq\Delta,\ |z|\leqq\Delta$$

デ一樣收斂デ，$a_{kl}(t)$ ハ漸近的ニ

(9) $$a_{kl}(t) \sim \sum_j a_{jkl} e^{jt}$$

ト展開サレルモノトスル。此ノ場合ニハ (3) ノ解ハ収斂級数

(10) $$y = u \sum p_l(t, u) v^l, \quad z = v \sum q_l(t, u) v^l$$

ニ展開サレ，$p_l(t, u)$，$q_l(t, u)$ ハ漸近的ニ

(11) $$p_l(t, u) \sim \sum_{jk} p_{jkl} e^{jt} u^k,$$

$$q_l(t, u) \sim \sum_{jk} q_{jkl} e^{jt} u^k$$

ト展開サレル。但シ t, u ハ

$$\underline{\theta} \leqq \arg t \leqq \bar{\theta}, \qquad t \to \infty$$

$$\frac{1}{n}(\underline{\theta} - \pi) + 0 < \frac{\pi}{n} - \arg\left(a^{\frac{1}{n}} u\right) < \frac{1}{n}(\bar{\theta} + \pi), \quad u \to 0$$

トスル。前ノ場合ニハ $\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$ ヲ夫々 $\frac{\pi}{2}$。$\frac{3}{2}\pi$ ニ幾ラデモ近ク取レル。

5. $f(\log x, y, z)$ ガ $x = y = z = 0$ デ正則ナルトキ (3) ノ解ガ $x = e^t$ デ展開スルト収斂ニナルノハ $f(t, y, z)$ ノ t ニ関スル週期性カラ (3) ノ解ノ t ニ関スル週期性ガ得ラレルカラデアッテ XIV（本誌 145号）デ説明シタ理由ニ基ク。

(3) ノ解ヲ v デ展開スルト収斂ニナルガ u デ展開スルト一般ニ収斂ニナラナイ。ソノ差ガ何処カラ現ハレルカ、コレハ u，v ト C, C' ノ対應 (5) ヲ見ルト分ル．一ツノ u ノ値ニ對應スル C ハ唯一ツデナイ，併シ C ヲキメテ了フト v

ト C' ノ對應ハ一對一トナル。從ツテ(3)ノ解ヲ (t, u, v) ノ函數ト考ヘタトキ，ソレハ u ニ關シテ $u=0$ ノ近傍デ一價トナラナイが，v ニ關シテハ $v=0$ ノ近傍デ一價トナリ，從ツテ $v=0$ が除去可能ノ特異点ニナルノデアル。