664. 二次微分方程式ト積分方程式トノ関係(II)

亀田豊治郎

4. 基本定理ハ如何ナル條件ノ下ニ成立スルカヲ茲ニ述ベル。最初ニ注意ヲ要スルハ t, x 及ビ ξ ハ一般ニ複素數デアツテ、積分ハ t ヨリ x マデ一定ノ曲線 C ニ沿フテ爲サレルコトデアル。而シテ特ニ t, x, ξ ガ實數デ C ガ直線ナラバ，基本定理ハ實積分ノ関係式トナル。

サテ前款ノ證明ニ於テ如何ナル前提ガ置カレテアルカヲ一々考ヘテ，成立條件ヲ見出スト

1) $\mathcal{L}(y)=y''+Py'+Qy=0$ ノ二獨立解ガ C ニ於テ有限デアルコト。

2) $M(z)=z''+Pz'+(Q-G)z=0$ ノ二獨立解ガ C ニ於テ有限デアルコト。

3) $b(x)=e^{-\frac{1}{2}\int^{x}P\,dx}$ ハ x ガ C 上ノ如何ナル点ニ於テモ 0 又ハ ∞ トナラナイコト。

4) $G(x)$ ガ C ニ於テ ∞ トナラナイコト。

此等ハ基本定理

$$K(x,t)-\overline{K}(x,t)=-\int_{t}^{x}K(x,\xi)\overline{K}(\xi,t)G(\xi)\,d\xi$$

$$=-\int_{t}^{x}\overline{K}(x,\xi)K(\xi,t)G(\xi)\,d\xi$$

ガ成立スルタメニ充分ナル條件デアル。今後コレ等ノ條

件ヲ便宜"C上ノ條件"ト呼ブコトトスル。

例1. m, n ヲ 0 デナイ常數トシ

$$L(y) = y'' + my$$

$$M(z) = z'' + nz$$

ト置ケバ

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}\,(x-t)$$

$$\overline{K}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \sqrt{n}\,(x-t)$$

$$G = m - n$$

トナル。

故ニ基本定理ハ

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}\,(x-t) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \sqrt{n}\,(x-t)$$

$$= -\frac{m-n}{\sqrt{mn}} \int_t^x \sin \sqrt{m}\,(x-\xi) \sin \sqrt{n}\,(\xi - t)\, d\xi$$

例2. m ヲ $\frac{1}{4}$ ニ等シクナイ常數トシ

$$L(y) = y'' + \frac{1}{4x^2} y$$

$$M(z) = z'' + \frac{m}{x^2} z$$

ト置ケバ　$y_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $y_2 = x^{\frac{1}{2}} \log x$ ヨリ

$$K(x, t) = \sqrt{tx} \log \frac{x}{t}$$

又, $z_1 = x^{\mu_1}$, $z_2 = x^{\mu_2}$, $\mu_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$,

$\mu_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{2}$ ヨリ

$$\overline{K}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-4m}}\left\{\left(\frac{x}{t}\right)^{\mu_1} - \left(\frac{x}{t}\right)^{\mu_2}\right\} t$$

$$G(x) = \frac{1-4m}{4x^2}$$

トナル。而シテ基本定理ハ此ノ等 K, $\overline{K}$, G ニ對シ C が $\xi = 0$ ヲ通過シナイ限リ成立スル。

正誤 第3款中 $b(x) = e^{\frac{1}{2}\int P\,dx}$ トアルハ $b(x)\,e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx}$ ノ誤ニ付訂正スル。

第二節 積分方程式(A)ノ解

本節デハ冒頭ニ掲ゲタ方程式(A), 即チ

$$u(x) = f(x) + \int_{(c)}^{x} K(x, t)\, G(t)\, u(t)\, dt \text{ --------(A)}$$

ノ解ヲ求メル。但シ a ハ有限ノ常數デアッテ、C 上ニアルモノトスル。

尚積分記号ニ附シタ(C)ハ a ヨリ x マデノ積分が曲線 C ニ沿フテ爲サレルコトヲ意味スル。

此ノ積分方程式ハ"C上ノ條件"ガ滿足サレルトキハ容易ニ解クコトガ出來ル。

先ヅ(A)ガ有限解ヲ有スルモノト假定シテ x ノ代リニ ξ ト書ケバ

$$u(\xi)=f(\xi)+\int_{a(C)}^{\xi} K(\xi,t)\,G(t)\,u(t)\,dt \text{-----------}(1)$$

(1)ノ両辺ニ $\overline{K}(x,\xi)\,G(\xi)$ ヲ乘ジ a カラ x マデ C ニ沿フテ積分スレバ

$$\int_{a(C)}^{x}\overline{K}(x,\xi)\,G(\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

$$=\int_{a(C)}^{x}\overline{K}(x,\xi)\,G(\xi)\,f(\xi)\,d\xi$$

$$+\int_{a(C)}^{x}\overline{K}(x,\xi)G(\xi)\,d\xi\int_{a(C)}^{\xi}K(\xi,t)\,G(t)\,u(t)\,dt \text{------}(2)$$

"C上ノ條件"ガ滿足セラルルモノトスレバ,(2)ノ最後ノ積分ハ順序ヲ変更シ得ル。即チ

$$\int_{a(C)}^{x}\overline{K}(x,\xi)\,G(\xi)\,d\xi\int_{a(C)}^{x}K(\xi,t)\,G(t)\,u(t)\,dt$$

$$=\int_{a(C)}^{x}u(t)\,G(t)\,dt\int_{t(C)}^{x}\overline{K}(x,\xi)\,K(\xi,t)\,G(\xi)\,d\xi \text{-----}(3)$$

此ノ式ノ証明ハ $t,\ \xi$ 及ビ x ヲ a カラ測ッタC線ノ長サノ函数トシテ表ハシ,*Dirichlet* ノ公式ヲ用フレバ直チニ得ラレル。

サテ(3)式ノ右辺ヲ基本定理ニ依リ変化スレバ

$$\int_{a(c)}^{x}\overline{K}(x,\xi)G(\xi)\,d\xi\int_{a(c)}^{\xi}K(\xi,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$=\int_{a(c)}^{x}u(t)G(t)\left\{\overline{K}(x,t)-K(x,t)\right\}dt$$

ヲ得ル。之ヲ(2)ノ右辺ニ代入スレバ

$$\int_{a(c)}^{x}\overline{K}(x,\xi)G(\xi)u(\xi)\,d\xi$$

$$=\int_{a(c)}^{x}\overline{K}(x,\xi)G(\xi)f(\xi)\,d\xi$$

$$+\int_{a(c)}^{x}\overline{K}(x,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$-\int_{a(c)}^{x}K(x,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$\therefore\ \int_{a(c)}^{x}K(x,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$=\int_{a(c)}^{x}\overline{K}(x,t)G(t)f(t)\,dt \quad\text{-------------}(4)$$

(4) ヲ (A) ニ代入スレバ

$$u(x)=f(x)+\int_{a(c)}^{x}\overline{K}(x,t)G(t)f(t)\,dt \quad\text{-------}(5)$$

ヲ得ル。即チ (A) ガ有限解ヲ有スルナラバ (5) 式ヲ與ヘラレネバナラヌ。

逆ニ (5) 式ガ (A) ヲ満足スルコトモ $f(x)$ ガ C 上ニ於テ有限ナラバ基本定理ニ依ツテ証明シ得ル。

故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理3. $K(x,t)$ 及ビ $\overline{K}(x,t)$ ガ"C上ノ條件"ヲ満足スル微分方程式ヨリ作ラレタ核デアッテ，函數 $f(x)$ ガC上ノ凡テノ點ニ於テ有限ナルトキハ，方程式

$$u(x)=f(x)+\int_{a(C)}^{x}K(x,t)\,G(t)\,u(t)\,dt$$

ノ有限解ハ

$$u(x)=f(x)+\int_{a(C)}^{x}\overline{K}(x,t)\,G(t)\,f(t)\,dt$$

ニ等シク且ツ之ニ限ル。

例1. 方程式

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{x}(x-t)\,u(t)\,dt$$

ヲ解ケ。但シ a 及ビ λ ハ常數トシ必ズシモ實數デナイモノトスル。

(解) $\mathcal{L}(y)=y''$, $G(t)=\lambda$

ト置ケバ

$$K(x,t)=x-t$$

トナルカラ，定理3ガ適用出來ル。

先ヅ $\overline{K}$ ヲ計算スルニ

$$M(z)=z''-\lambda z=0$$

ノ二解ハ

$$z_1(x)=e^{\sqrt{\lambda}\,x},\quad z_2(x)=e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$$

デアル。

故ニ

$$\overline{K}(x,t)=\frac{e^{\sqrt{\lambda}(x-t)}-e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)}}{2\sqrt{\lambda}}$$

デアッテ、任意ノ曲線 C ニ對シ"C上ノ條件"ハ満足サレル。

故ニ

$$u(x)=f(x)+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int_a^x\left\{e^{\sqrt{\lambda}(x-t)}-e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)}\right\}f(t)dt$$

ハ $f(x)$ ガ有限ナル區域内ニ於テ所要ノ解デアル。

例2. λヲ $\frac{1}{4}$ ニ等シクナイ常數トシテ

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{a\,(c)}^{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)u(t)dt$$

ヲ解ケ。

(解)　先ヅ $\frac{1}{x}$ 及ビ 1 ヲ二解 y_1, y_2 トスル微分方程式

$$L(y)\equiv y''+\frac{2}{x}y'=0 \qquad (1)$$

ヲ考ヘルト

$$K(x,t)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \\ y_1(t) & y_2(t)\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)t^2$$

トナルカラ

$$G(t) = -\frac{\lambda}{t^2}$$

ト置ケバ，所題ノ方程式ハ定理３ノ形ニナル。故ニ微分方程式

$$M(z) \equiv z'' + \frac{2}{x} z' + \frac{\lambda}{x^2} z = 0$$

ノ二解ヲ知レバ之レヲ解クコトガ出来ル。今

$$\nu_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}, \quad \nu_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

ト置ケバ

$$z_1 = x^{\nu_1}, \quad z_2 = x^{\nu_2}$$

ハ $M(z) = 0$ ノ二独立解デアッテ

$$\overline{K}(x,t) = \frac{x^{\nu_1} t^{1-\nu_1} - x^{\nu_2} t^{1-\nu_2}}{\sqrt{1-4\lambda}}$$

トナル。故ニ所要ノ解ハ

$$u(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1-4\lambda}} \int_{a\,(c)}^{x} \left\{ \left(\frac{x}{t}\right)^{\nu_1} - \left(\frac{x}{t}\right)^{\nu_2} \right\} \frac{f(t)}{t} dt$$

デアッテ、C ハ $t=0$ ヲ通過シナイ任意ノ曲線デアレバヨイ。