663. 円球ノ幾何

松村　宗治（台北大）

下ニ余ノ論文（台北大學紀要第二巻第一号ニ於ケル球ノ幾何）及ビ *Blaschke* 氏微分幾何 III ニ於ケル記法ヲ用ヒテ円ト球ニ関スル研究ニツイテノベヨウト思フ。

§1

$\mathfrak{y}$ ハ R_2 上ノ円，$\mathfrak{p}$ ハ其上ノ点トセバ

$$(1)\quad \mathfrak{z} = \mathfrak{y} + i\mathfrak{p},$$

$$(2)\quad \bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{y} - i\mathfrak{p}, \qquad i = \sqrt{-1}$$

ニテ示サルル $\mathfrak{z}$ 及ビ $\bar{\mathfrak{z}}$ ハ何レモ R_2 上ノ円ヲ表ハス、何トナレバ

$$(\mathfrak{z}\mathfrak{z}) = 1, \quad (\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{z}}) = 1$$

ナルコトガ (1), (2) ヨリ分ルカラデアル。

尚、亦

$$(3)\quad (\mathfrak{z}\mathfrak{p}) = 0,$$

$$(4)\quad (\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{p}) = 0$$

デアルガ故ニ $\mathfrak{p}$ ハ $\mathfrak{z}$ 及ビ $\bar{\mathfrak{z}}$ 上ニ存在シテイル。

更ニスヽンデ

$$(5)\quad (\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}}) = 1,$$

$$(6)\quad (\mathfrak{z}\mathfrak{y}) = 1,$$

$$(7)\quad (\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{y}) = 1$$

デアルカラ $\mathfrak{y}$ ナル円ハ円 $\mathfrak{z}$ 及ビ円 $\bar{\mathfrak{z}}$ ニ切ス、マタ円 $\mathfrak{z}$

ト $\bar{\mathfrak{z}}$ トハ互ニ相切ストイフコトが分ル。

上ノ(1), (2)ニテ i ノ代リニ ε ヲオイテモ同様ノコトがイヘル。コヽニ ε ハ *duale Zahlen* デアリ $\varepsilon^2=0$ トスル。

マタ i ノ代リニ 1 ヲオイテモ、マタ同様ノコトがイヘル。尚 x_0 ヲ通リ $\mathfrak{y}$ ニ切スル円 $\mathfrak{z}$ ヲ考ヘルトコノ $\mathfrak{z}$ ハ $\mathfrak{z}$ 及ビ $\bar{\mathfrak{z}}$ ニ切スルコトニナルコトヲ証明スルコトが出来ル。

§ 2

円系表面上ノ線素ヲ ds トセバ

$$(1)\qquad ds^2=\lambda\{(\theta_t\theta_t)\,dt^2+2(\theta_t\theta_\tau)\,dt\,d\tau+(\theta_\tau\theta_\tau)\,d\tau^2\}$$

ト置クコトが出来ル。

サテ(1)ヲバ所謂 *isotherme Form*

$$(2)\qquad ds^2=K(p,q)\{dp^2+dq^2\}$$

ト置ク。コヽニ p, q ハ新シイ *parameter* デアル。

然ルトキハ

$$\{(\theta_t\theta_\tau)\,p_\tau-(\theta_\tau\theta_\tau)\,p_t\}\,q_\tau+\{(\theta_\tau\theta_\tau)\,p_t-(\theta_t\theta_\tau)\,p_\tau\}\,q_t=0$$

即チ

$$(3)\qquad \begin{aligned} q_t&=-\mu\{(\theta_t\theta_t)\,p_\tau-(\theta_t\theta_\tau)\,p_t\},\\ q_\tau&=+\mu\{(\theta_\tau\theta_\tau)\,p_t-(\theta_t\theta_\tau)\,p_\tau\}\end{aligned}$$

が成立ツ。コヽニ

$$(4)\qquad \mu=\frac{1}{\{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)\}^2},$$

$$
(5)\quad
\begin{cases}
q_t = -\dfrac{(\theta_t\theta_t)\,p_\tau - (\theta_t\theta_\tau)\,p_t}{\mathbb{W}}, \\[2ex]
q_\tau = \dfrac{(\theta_\tau\theta_\tau)\,p_t - (\theta_t\theta_\tau)\,p_\tau}{\mathbb{W}}
\end{cases}
$$

$$
(6)\quad
\begin{cases}
p_t = \dfrac{(\theta_t\theta_t)\,q_\tau - (\theta_t\theta_\tau)\,q_t}{\mathbb{W}}, \\[2ex]
p_\tau = \dfrac{-\{(\theta_\tau\theta_\tau)\,q_t - (\theta_t\theta_\tau)\,q_\tau\}}{\mathbb{W}}
\end{cases}
$$

デアル。

但シ $\quad \mathbb{W}^2 = (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_t\theta_\tau)^2$

デアル。コノ場合ニ

$$
(7)\quad p_t = q_\tau,\quad p_\tau = -q_t
$$

ガ成立チ Cauchy - Riemann ノ函数論ニ於ケル微分方程式ヲ得。

尚

$$
q = \int \frac{-\{(\theta_t\theta_t)\,p_\tau - (\theta_t\theta_\tau)\,p_t\}\,dt + \{(\theta_\tau\theta_\tau)\,p_t - (\theta_t\theta_\tau)\,p_\tau\}\,d\tau}{\mathbb{W}}
$$

トナリ

$$
(9)\quad \left\{\frac{(\theta_t\theta_t)\,p_\tau - (\theta_t\theta_\tau)\,p_t}{\mathbb{W}}\right\}_\tau + \left\{\frac{(\theta_\tau\theta_\tau)\,p_t - (\theta_t\theta_\tau)\,p_\tau}{\mathbb{W}}\right\}_t = 0
$$

ナラバ (8) ノ積分記號ノ中ガ完全微分ナルコトナル。

モシ

$$
w = f(z) = t + i\tau
$$

トセバ

$$
|dw| = |f'(z)| \frac{ds}{\sqrt{K}},
$$

(10)

$$
ds^2 = \frac{K}{|f'(z)|^2} (dt^2 + d\tau^2)
$$

トナル。

$$
ds^2 = (dp + i\,dq)(dp - i\,dq) = 0
$$

ナルガ故ニ

$$
dz = dp + i\,dq = 0
$$

即チ

$$
z = \mathrm{const}
$$

ハ長サガ零ナル虚曲線群ヲ円柱表面上ニ與フ。

L. Lichtenstein: Zur Theorie der konformen Abbildung……, Bull. Acad. Cracovie 1916, S. 192—217

ヲ参照シタ。