660. 二次微分方程式ト積分方程式トノ關係(I)

龜田　豊治朗

本論文デハ最初二次ノ定理ヲ証明スル。

y_1, y_2 ヲ微分方程式

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

ノ任意ノ二獨立解トスレバ、積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)} G(t)u(t)\,dt \cdots\cdots(A)$$

ノ解ハ

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{z_1(x)z_2(t) - z_2(x)z_1(t)}{z_1'(t)z_2(t) - z_2'(t)z_1(t)} G(t)f(t)\,dt$$

デアル。但シ z_1, z_2 ハ微分方程式

$$z'' + Pz' + (Q - G)z = 0$$

ノ任意ノ二独立解デアル。

次ニ之ヲ擴張シテ積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)} G(t)u(t)\,dt$$

$$+ \int_a^b \left\{ y_1(x)\alpha(t) + y_2(x)\beta(t) \right\} u(t)\,dt \cdots\cdots(B)$$

ノ解ヲ求メル。但シ α, β ハ任意ノ積分シ得ベキ函數，a 及ビ b ハ任意ノ常數デアル。

積分方程式 (B) ハ α, β ヲ適當ニ選ベバ對稱核ヲ有ス

ル方程式トナルカラ、固有函數ノ問題モ之

尚 a 及ビ b ハ必ズシモ實數有限トハ限ラナイ。

(B)ヲ更ニ擴張スレバ積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^x \frac{y_1(x)y_2(t)-y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t)-y_2'(t)y_1(t)}G(t)u(t)dt$$

$$+\sum_{K=1}^{n}\int_a^b\left\{y_1(x)\alpha_K(t)+y_2(x)\beta_K(t)\right\}u(t)dt \cdots\cdots(C)$$

トナルノデアルガ、此場合ヲモ論ズル。

二次微分方程式ト積分方程式トノ關係ハ普通 Green ノ函數ニ依ルノデアルガ、本論分デハ直接ニ且ツ一般的ニ此問題ヲ論ジヨウトスルノデアル。

第一節 基本定理

1. 簡單ノ爲メ

$$\frac{y_1(x)y_2(t)-y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t)-y_2'(t)y_1(t)}=K(x,t)$$

$$\frac{z_1(x)z_2(t)-z_2(x)z_1(t)}{z_1'(t)z_2(t)-z_2'(t)z_1(t)}=\overline{K}(x,t)$$

ト置ク。本節ノ目的トスル所ハ Volterra 型ノ核 $K(x,t)G(t)$ ト $-\overline{K}(x,t)G(t)$ トノ間ニ相反ノ關係ガ成立ツコトデアル。即チ

$$K(x,t)G(t)-\overline{K}(x,t)G(t)$$

$$=-\int_t^x K(x,\xi)G(\xi)\overline{K}(\xi,t)G(t)d\xi$$

$$= -\int_t^x \overline{K}(x,\xi)\, G(\xi)\, K(x,\xi)\, G(t)\, dt$$

ヲ証明スルノガ終局ノ目的デアルガ、之ニハ先ヅ $P=0$ ナル特別ノ場合ニ就テ証明スル。

2\. 周知ノ如ク微分方程式

$$L(y) = y'' + Py' + Qy = 0$$

ハ

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int P\, dx}\, \eta$$

ト置クコトニ依リ

$$\eta + I\eta = 0 \qquad (1)$$

ニ変形サレル。但シ

$$I = Q - \frac{P'}{2} - \frac{P^2}{4}$$

今 η_1, η_2 ヲ方程式 (1) ノ独立解トスレバ $\eta_1'\eta_2 - \eta_2'\eta_1$ ハ常数ニ等シイ。加之 η_1 又ハ η_2 ニ適当ノ常数ヲ乗ズレバ其値ヲ1トスルコトガ出来ル。

斯ノ如キ η_1, η_2 ニ對シ $K_0(x,t)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$\left.\begin{aligned} &K_0(x,t) = \eta_1(x)\,\eta_2(t) - \eta_2(x)\,\eta_1(t) \\ &\text{但シ}\quad \eta_1'(t)\,\eta_2(t) - \eta_2'(t)\,\eta_1(t) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

同様ニ微分方程式

$$M(z) = z'' + Pz' + (Q-G)\,z = 0$$

ニ於テ

$$z = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} \zeta$$

ト置ケバ、此ノ方程式ハ

$$\zeta'' + (I - G)\zeta = 0 \qquad (3)$$

ニ変形サレル。而シテ ζ_1, ζ_2 ヲ $\zeta_1'\zeta_2 - \zeta_2'\zeta_1 = 1$ ナル (3) ノ二解トシ, $\overline{K}_0(x, t)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$\left.\begin{array}{l} \overline{K}_0(x,t) \equiv \zeta_1(x)\zeta_2(t) - \zeta_2(x)\zeta_1(t) \\ \quad 但シ \quad \zeta_1'(t)\zeta_2(t) - \zeta_2'(t)\zeta_1(t) = 1 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

斯ク K_0 及ビ $\overline{K}_0$ ヲ定義スルト此等ニハ種々ナ関係式が成立ツ。其ノ内、後ノ証明ニ必要ナモノヲ補題トシテ掲ゲル。

補題: $K_0(x, t)$ 及ビ $\overline{K}_0(x, t)$ ヲ夫々 (2) 及 (4) デ定義スレバ

i) $K_0(x, x) = \overline{K}_0(x, x) = 0$

ii) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} K_0(x, t) + I(t) K_0(x, t) = 0$

iii) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{K}_0(x, t) + \{I(x) - G(x)\} \overline{K}_0(x, t) = 0$

iv) $\left[\dfrac{\partial}{\partial x} K_0(x, t)\right]_{x=t} = \left[\dfrac{\partial}{\partial x} \overline{K}_0(x, t)\right]_{x=t} = 1$

v) $\left[\dfrac{\partial}{\partial t} K_0(x, t)\right]_{t=x} = \left[\dfrac{\partial}{\partial t} \overline{K}_0(x, t)\right]_{t=x} = -1$

vi) $K_0(t, x) = -K_0(x, t)$, $\overline{K}_0(t, x) = -\overline{K}_0(x, t)$

之レヨリ相反ノ関係、即チ

$$K_0(x,t)G(t)-\overline{K}_0(x,t)G(t)$$
$$=-\int_t^x K_0(x,\xi)G(\xi)\overline{K}_0(\xi,t)G(t)\,d\xi$$

ヲ証明スル。

補題ノ iii) ニ於テ x ノ代リニ ξ ト書ケバ

$$\overline{K}_0(\xi,t)G(\xi)=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\overline{K}_0(\xi,t)+I(\xi)\overline{K}_0(\xi,t)$$

ヲ得ルカラ

$$\int_t^x K_0(x,\xi)G(\xi)\overline{K}_0(\xi,t)\,d\xi$$
$$=\int_t^x K_0(x,\xi)\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\overline{K}_0(\xi,t)+I(\xi)\overline{K}_0(\xi,t)\right\}d\xi$$

此式ノ右辺ノ第一項ニ部分積分ヲ二回施セバ

$$\int_t^x K_0(x,\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\overline{K}_0(\xi,t)\,d\xi$$
$$=\left[K_0(x,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{K}_0(\xi,t)\right]_t^x-\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}K_0(x,\xi)\right)\overline{K}_0(\xi,t)\right]_t^x$$
$$+\int_t^x\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}K_0(x,\xi)\right)\overline{K}_0(\xi,t)\,d\xi$$

補題 i) iv) 及ビ v) ヲ用ヒテ之ヲ簡単ニスレバ

$$=-K_0(x,t)+\overline{K}_0(x,t)$$
$$+\int_t^x\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}K_0(x,\xi)\right)\overline{K}_0(\xi,t)\,d\xi$$

ヲ得ル。故ニ

$$\int_t^x \mathrm{K}_0(x,\xi)\,G(\xi)\,\overline{\mathrm{K}}_0(\xi,t)\,d\xi = -\mathrm{K}_0(x,t)+\overline{\mathrm{K}}_0(x,t)$$
$$+\int_t^x \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathrm{K}_0(x,\xi)\right)\overline{\mathrm{K}}_0(\xi,t)\,d\xi$$
$$+\int_t^x \mathrm{I}(\xi)\,\mathrm{K}_0(x,\xi)\,\overline{\mathrm{K}}_0(\xi,t)\,d\xi$$

然ルニ補題 ii) ニ依レバ最後ノ二積分ノ和ハ零トナルカラ、相反関係ハ直チニ得ラレル。即チ次定理ヲ得ル。但シ最後ノ式ノ証明ハ定理ノ前半ニ於テ x ト t トヲ置換ヘ補題 vi) ニ依ル。

定理 1. $\mathrm{K}_0(x,t)$ 及ビ $\overline{\mathrm{K}}_0(x,t)$ ヲ夫々 (2) 及ビ (4) デ定義スレバ

$$\mathrm{K}_0(x,t)-\overline{\mathrm{K}}_0(x,t) = -\int_t^x \mathrm{K}_0(x,\xi)\,G(\xi)\,\overline{\mathrm{K}}_0(\xi,t)\,d\xi$$
$$= -\int_t^x \overline{\mathrm{K}}_0(x,\xi)\,G(\xi)\,\mathrm{K}_0(\xi,t)\,d\xi$$

即チ $\mathrm{K}_0(x,t)\,G(t)$ ト $-\overline{\mathrm{K}}_0(x,t)\,G(t)$ トハ Volterra 型積分方程式ノ核トシテ相反ノ関係ニアル。

3. 以上ハ特殊ノ核 K_0, $\overline{\mathrm{K}}_0$ ニ就テノ定理デアルガ，之ヨリ一般ノ $\mathrm{K}(x,t)$ ト $\overline{\mathrm{K}}(x,t)$ ニ對シ定理 1 ヲ擴張スル。最初ニ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 2. $\mathrm{K}(x,t) \equiv \dfrac{y_1(x)\,y_2(t)-y_2(x)\,y_1(t)}{y_1'(t)\,y_2(t)-y_2'(t)\,y_1(t)}$

ハ獨立解 y_1, y_2 ノ取リ方ニ無関係デアル。

証明: y_1, y_2 ノ代ニ他ノ二解 $a_{11}y_1+a_{12}y_2$, $a_{21}y_1+a_{22}y_2$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ヲ取リ定理ノ分數式ニ入レ計算スルト此式ノ不

交デアルコトガ直ニ分ル。

サテ η_1, η_2 ハ (1) ノ二獨立解デアルカラ

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}\eta_1, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}\eta_2$$

ハ方程式

$$L(y) = 0$$

ノ二獨立解デアル。

$$e^{\frac{1}{2}\int p\,dx} = b(x)$$

ト置キ，此レ等 y_1 及ビ y_2 カラ定義通リニ $K(x, t)$ ヲ計算スレバ

$$K(x,t) = \frac{\eta_1(x)\eta_2(t) - \eta_2(x)\eta_1(t)}{\eta_1'(t)\eta_2(t) - \eta_2'(t)\eta_1(t)} \cdot \frac{b(x)}{b(x)}$$

$$= K_0(x, t)\frac{b(x)}{b(t)}$$

ヲ得ル。同様ニ

$$\overline{K}(x,t) = \overline{K}_0(x,t)\frac{b(x)}{b(t)}$$

故ニ

$$\int_t^x K(x,\xi)\overline{K}(\xi,t)G(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_t^x K_0(x,\xi)\overline{K}_0(\xi,t)\frac{b(x)}{b(\xi)}\cdot\frac{b(\xi)}{b(t)}G(\xi)\,d\xi$$

故ニ定理 1 ニ依リ

$$=\frac{b(x)}{b(t)}\left\{\overline{K}_0(x,t)-K_0(x,t)\right\}$$

$$=\overline{K}(x,t)-K(x,t)$$

同様ニ

$$\int_t^x \overline{K}(x,\xi)K(\xi,t)G(\xi)d\xi=\overline{K}(x,t)-K(x,t)$$

ヲ得ル。之レ等ハ $K(x,t)G(t)$ ト $-\overline{K}(x,t)G(t)$ トガ相反関係ニアルコトヲ示スモノデアル。即チ次ノ定理ヲ得ル。

基本定理. $K(x,t)$ ト $\overline{K}(x,t)$ トノ間ニハ次ノ関係ガ成立ツ。

$$K(x,t)-\overline{K}(x,t)=-\int_t^x K(x,\xi)\overline{K}(\xi,t)G(\xi)d\xi$$

$$=-\int_t^x \overline{K}(x,\xi)K(\xi,t)G(\xi)d\xi$$