658. Amoituita mama, XII

福原満洲雄（九大）

1. Trjitzinsky ハ最近遂ニ非線形方程式ニ手ヲ着ケタ。

即チ

Non-linear difference equations, Compositio Mathematica, vol. 5 (1937) pp. 1—66.

Theory of non-linear singular differential systems, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 42 (1937) pp. 225—321.

ガソレデアル、定差方程式ニツイテモ言ヒタイコトガアルガ，手ガマワリ切ラナイカラ機会ガアツタラ其ノ方面ニモ言及スルコトニシテ，コヽデハ微分方程式ノ方ダケニ限ツテパラパラット頁ヲ繰ツテ見タ後ノ感想ヲ述ベヨウ、詳シク読ンダノデハナイカラ誤解ガアルカモ知レナイ。若シアレバ氣付カレタ時御注意ヲ頂ケレバ幸デアル。

前ニモ書イタコトガアルヤウニ彼ノ研究ハ本格的デアル，彼ガ扱フ問題ハ現在ノ流行カラハ可成リハナレタモノダト言

ハレルカモ知レナイ、併シ流行ニ惑ハサレルコトナク，微分方程式論ニ於ケル中心問題ヲ次カラ次ヘト片付ケテ行カウトイフ態度ニハ賞讃ノ辞ヲ惜シムベキデハナイ、其ノ証明ヤ結果ニハ多少ノ不満ハアルケレドモ

2. 先ヅ最初ニ彼ハ

$$\text{(A)} \quad t^{-p} y_j'(t) = a_j(t, y_1, \cdots\cdots, y_n)$$

$$(j = 1, \cdots\cdots, n;\ p \text{ ハ整数} \geqq 0)$$

ヲ論ジテキル。(A) ノ右辺ニ関シテハ

$$a_j(t, y_1, \cdots\cdots, y_n) = l_j(t, y_1, \cdots\cdots, y_n) + q_j(t, y_1, \cdots\cdots, y_n)$$

$$l_j(t, y_1, \cdots\cdots, y_n) = l_{1j}(t)\, y_1 + \cdots\cdots + l_{nj}(t)\, y_n$$

$$q_j(t, y_1, \cdots\cdots, y_n) = \sum {}_j a_{i_1 \cdots\cdots i_n}(t)\, y_1^{i_1} \cdots\cdots y_n^{i_n}$$

$$(i_1, \cdots\cdots, i_n \geqq 0;\ i_1 + \cdots\cdots + i_n \geqq 2;\ j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

係数 $l_{ij}(t)$, ${}_j a_{i_1 \cdots\cdots i_n}(t)$ ハ $t = \infty$ ニ於テ正則（或ハ t^{-1} ; 負ノ冪ヲ含マナイ冪級数ニ漸近的ニ展開サレル解析函数），級数ハ $y_1, \cdots\cdots, y_n, t^{-1}$ ガ十分ニ小サイトキ一様収斂ト仮定スルノデアル、更ニ次ノ仮定ガハイッテキル。

It will be assumed that the linear system obtained by letting $q_j = 0$ ($j = 1, \cdots\cdots, n$) is actually of order n, and that it is not of Fuchsian type.

以上ガ最初ノ第一頁ニ書カレタ假定デアル。然ル後

The analytic theory will be developed for the complex neighbourhood of the singular point $t=\infty$

ト書イテヰル、コレデコノ論文ノ内容ニ関シテ大体ノ見當ハツク。

3. 以上述ベタ假定ノ中デ特ニ注目スベキハ原文ノ儘引用シタトコロデアル。actually of order n トイフコトハドウイフ意味カ知ラナイガ大シテ問題ニスル程ノコトモナカラウ。ソレヨリ重大ナノハ

$$\text{(LA)}\qquad t^{-p}y_j'(t)=l_j(t, y_1, \cdots\cdots, y_n)$$

$$(j=1, \cdots\cdots, n)$$

ガ Fuchs 型デナイトイフ假定ヲ何故設ケタカトイフコトデアル。

彼ハ $t\to\infty$ ノ時 e^{at^p} ノ order デ 0 ニナル解ダケヲ目標ニシテヰルノデアルト自分ハ想像シタ。ソレナラ出來テモ感心スル程ノコトハナイ、難シイノハ e^{at^p} ヨリ低イ order デ 0 ニナル解ノ方ダカラデアル。コノ両者ノ間ニハ難易ニ格段ノ差ガアルコトハヤツテ見レバ自ラ了解サレル。併シ易イ方サヘモ、ソレガ中心的ナ問題トシテノ価値ヲ持ツテヰルニモ拘ラズ、片ガ付イテヰナカツタノダカラ呆レルノ他ハナイ、ソレハ兎ニ角トシテ先ヘ目ヲ移シテ行カウ。

4. 先ヅ形式的ノ解ヲ求メル必要ガアル・ソレヲ彼ガドウイフ風ニ扱ッテキルカト思ッテ、ソノ点ヲ注意シテ見ル、形式的ノ解ヲ求メルニハ直接ニソレヲ求メルヨリ，豫メ適當ナ変換ヲ行ッテ方程式ヲ簡單ナ形ニ導キ，ソノ解ヲ求メ然ル後原方程式ニ戻ルノガ方法ガ組織立ツコトヲ前ニ注意シタコトガアルガ彼ハ未ダコノ方法ヲ使ッテ居ナイ。

(LA) ハ線形デアルカラ既ニ解カレタ、ソノ形式的ノ解トシテハ係数ガ t^{-1} ノ冪級数デアルヤウナ $\log t$ ノ整多項式ニ $t^{r}e^{Q(t)}$ （$Q(t)$ ハ $t^{\frac{1}{k}}$ ノ整多項式，k ハ正ノ整数，r ハ常数）ガカカッタ形ノモノガ丁度 n 個得ラレル。

(LA) ガ Fuchs 型デナイカラ $Q(t) \neq 0$ デアルヤウナモノガアル、時ニ t ガ適當ナ領域ノ中カラ ∞ ニ近ヅクトキ $e^{Q(t)} \to 0$ トナルヤウナモノダケ考ヘ，ソレヲ $Q_1(t), \cdots\cdots, Q_m(t)$，殘リノ $Q(t)$ ヲ $Q_{m+1}(t), \cdots\cdots, Q_n(t)$ トスル。$Q_\lambda(t)$ ニ對應スル (LA) ノ解ヲ

$$y_j = {}_0y_{\lambda j}(t) \qquad (j=1,\cdots\cdots,n;\ \lambda=1,\cdots,n)$$

トスレバ (1) ハ 0 ニ收斂スル解トシテ

$$y_j = \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda \, {}_0y_{\lambda j}(t) \qquad (j=1,\cdots\cdots,n)$$

ヲ持ツコトニナル。ソコデ (A) ノ解ハ $c_1, \cdots\cdots, c_m$ ノ冪級数ニ展開サレルモノトシ、ソレ等ニ關シテ一次ノ項ノ係数トシテハ ${}_0y_{\lambda j}(t)$ ヲ取ルコトニスレバ，ソレ等ニ關シテ

2次又ハソレヨリ高イ項ノ係数ハ未定係数ノ方法ニヨリ次第ニキマッテ行クノデアル。ソノ場合 $C_1^{k_1}$ ……… $C_m^{k_m}$ ノ係数ハ係数ガ t^{-1} ノ冪級数（負ノ冪ヲ含マナイ）デアルヤウナ $\log t$ ノ整多項式ニ

$$t^{k_1 r_1+\cdots\cdots+k_m r_m} e^{k_1 Q_1(t)+\cdots\cdots+k_m Q_m(t)}$$

ガカカッタ形ニナルコトガ Lemma 4 (p. 258) ニ述ベテアル、コレダカラ簡単ナノデアル。order ノ低イ解ニナルト，ソノ係数ノ中ニ $\log t$ 許リデナク，$\log\log t$，$\log\log\log t$，……… ナドモ現ハレテ來ル。ソレデモ 0 ニ收斂スル解ダケヲ考ヘルナラバ割ニ簡単ダト思フ、困難ナ問題ハソノ先ニアルコトヲ知ラナケレバナラナイ。

5. 次ニ形式的ノ解ヲ漸近展開トスル解ノ存在デアル。ソレガ The First Existence Theorem (p. 274) デアル。イタリックデ書イテアル部分ダケデモ一頁一杯ヲ費シテヰルガ，ソコダケ見テモハッキリ分ラナイ。シカシ全ク分ラナイノデモナイ。先ヅ氣ガ付クコトハ考ヘテヰル t ノ領域デ $\mathcal{R}\, Q_1(t)$，$\mathcal{R}\, Q_2(t)$，………，$\mathcal{R}\, Q_{n^2}(t)$ ノ間ニ順序ガツク（大小關係ニヨッテ）コトヲ假定シテヰルコト，次ニ

$$e^{Q_i(t)} \sim 0 \qquad (i=1,\cdots\cdots,m)$$

$$Q_i(t)=q_i t^{l_i/k_i}+\cdots\cdots \quad (i=1,\cdots\cdots,m;\ q_i \neq 0)$$

トシ

$$l' = \frac{l_1}{k_1} = \cdots\cdots = \frac{l_{\bar{m}}}{k_{\bar{m}}} > \frac{l_{\bar{m}+1}}{k_{\bar{m}+1}} \geqq \cdots\cdots \geqq \frac{l_m}{k_m}$$

$$(1 \leqq \bar{m} \leqq m)$$

ナル假定ヲシテヰル。コノ他ニモ假定ガ書イテアルガ特ニ注目スルニハ及バナイト思フ。然ルトキ前ニ得タ形式的ノ解ニ於イテ $C_{\bar{m}+1}, \cdots\cdots, C_m$ ヲ 0 ト置イテ得ラレル形式的ノ解ヲ漸近展開トスル(A)ノ解ガ存在スルトイフノガ結論デアル。

此ノ結論ヲ得ルニハ假定ガ強スギル、コレダケノ假定ノ下ニ於テハ結論ガ不足デアルト思フ。余リ長クナルカラ此ノ定理ニ関聯スル自分ノ予想ハ次回ニ譲ルコトニシテ定理ノ証明ニ目ヲ移スコトニショウ。

6. 形式的ノ解ヲ途中デ切ッテ変換ヲ行フコトハ自分ト同様デアル、結局カウセザルヲ得ナイノデアル。扨テ変換サレタ方程式ノ解ノ存在ヲ如何ニ片付ケテ居ルカト思ッテ見ルト逐次近似法デアル。勿論労力ヲ厭ハナケレバ、ソレデモ出来ル、逐次近似値ノ絶対値ノ上界ヲ出サナケレバナラナイカラ直接ニ存在定理ヲ使フヨリ面倒デアル、ソレダケ先ノ見透シガ利カナイコトモ事実デアラウト思フ、コレデ Trjitzinsky ノ研究ガドノ程度ノモノカ分ッタヤウニ思フ。

彼ハ続イテ(A)ノ右辺ガ t ヲ含マズ且ツ $p=0$ ノ場合ヲ特ニ(B)トシテ調ベテヰル、(B)ニ関スル定理ガ The

Second Existence Theorem デアル、又同様ナ問題ヲ補助変数ヲ含ム方程式 (C) ニツイテ論ジナオセル、コレニ関スル定理ガ *The Third Existence Theorem* デアル。此レ等モ大体 *The First Existence Theorem* ト同ジ程度ノモノト思ヘバ大シタ間違ヒハナカラウ。