657. Haar ノ measure ニ就イテ

角谷　静夫（阪大）

Haar ノ measure ガ unique デアルカドウカト云フ問題ハ J. v. Neumann 及ビ A. Weil ニヨツテ論ゼラレタ。コヽニ unique デアルトイフノハ勿論 constant factor ヲ除イテ unique デアルコトヲ指スノデアル。

最初 J.V. Neumann ハ compact ナ group ニ對シテソレガ unique デアルコトヲ證明シ，且ツ left-invariant ナ measure ト right-invariant ナ measure トガ一致スルコトモ示シタ。（Compositio Math., vol. 1, 1934）
其ノ後 J.V. Neumann ハ locally compact, separable ナ group ノ場合ニモ uniqueness ノ定理ガ成立スルコトヲ證明シタ.（Recueil, Math., 1(43), 1936）。
コノ時ハ left-invariant ナ measure ト right-

invariant ナ measure トハ必ズシモ一致シナイノデアル。

又一方コレト独立ニ A. Weil ハ一般ノ locally bicompact ナ group ニ対シテモ Haar ノ measure ガ定義シ得ラレ且ツソレガ unique デアルコトヲ証明シ得タト報ジテキル。(C.R.t.202, 1936) A. Weil ノ証明ハ J.v. Neumann ノ証明トソノ方法ガ全然異ッテヰルト云フコトデアルガ未ダ発表サレナイノデ如何ナル方法ニヨルノカワカラナイ。(コレハ恐ラク近イウチニ出ルコトニナッテヰル Memorial des Sciences Math. ノ一冊デアル A. Weil ノ著書中ニ書カレルモノト思ハレル)

次ニ述ベヨウトスル Haar ノ measure ノ uniqueness ノ証明ハ J.v. Neumann ノ証明ヲ簡単ニシタモノデアル。

v. Neumann ハ left-invariant ナ measure ノ uniqueness ノ証明ニ right-zero-invariance ナル概念ヲ用ヒテヰルガ、コレハ非常ニ面白イ又重要ナコトデアルケレドモ必要ノナイコトデアル。コレハ v. Neumann ガ left-invariant ナ measure ノミヲ考ヘテキタカラデ right-invariant ナ measure ヲモ同時ニ考ヘレバ証明ガ簡単トナルノデアル。即チ v. Neumann ハ double integral ヲ考ヘルトキ二度トモ同ジ measure (left-invariant ナ measure) ヲ用ヒテヰルガ、コレハ必要ノナイコトデ、第二ノ integral

トシテ right-invariant ナ measure ニヨル integral ヲトレバ議論ガ簡單トナルノデアル。

Group ノ measure ヲ考ヘル代リニ，一般ニ空間 S ト S ヲ S 自身へ homeomorphic ニ寫像スル変換 σ ノ作ル group G ガ與ヘラレタトキ G ニ属スル変換 σ ニ對シテ invariant ナ S ノ measure ヲ問題トスルナラバ、コノコトハ明瞭トナルノデアル。

即チカゝル measure ノ uniqueness ヲ証明シヨウトスル時ニハ product-space $S\times G$ デノ integral ヲ考ヘルコトニナルノデアルガコノ時 G ノ measure トシテ right-invariant ナモノヲ取レバヨイト云フコトハ明カデアル。

$\boxed{\text{uniqueness ノ定理ノ証明}}$ 証明ハ二ツノ部分ニ分レル。

(I) Group G トソノ left-invariant ナ measure μ ガ與ヘラレタ時 G ノ Borel 集合 E ガ任意ノ $a\in G$ ニ対シテ $\mu(E\dotplus aE-E\cdot aE)=0$ ヲ満足スレバ $\mu(E)=0$ 又ハ $\mu(G-E)$ トナル。コノ性質ヲ G ガ left-ergodic デアルトナヅケル。

(II) locally compact, separable ナ group G ガ left-ergodic デアレバ G ノ left-invariant ナ measure ハ unique デアル。

$\boxed{\text{(I) ノ証明}}$

E ノ characteristic function ヲ $\varphi(x)$ トセヨ。$\varphi(ax)$ ハ $a^{-1}E$ ノ characteristic function デアルカラ $|\varphi(ax)-\varphi(x)|$ ハ $E\dotplus a^{-1}E-E\cdot a^{-1}E$ ノ characteristic function トナル。然ルニ此集合ハ μ-measure ガ 0 デ

アルカラ

$$\int \left| \varphi(ax) - \varphi(x) \right| d\mu(x) = 0$$

デアル。但シ積分ハ x ニツキ、μ-measure ニ関シテ G 全体ニホドコスモノトスル。コノ関係ハ任意ノ $a \in G$ ニ對シテ成立スルカラ任意ノ G ノ right-invariant ナ measure λ ニ對シテ

$$\iint \left| \varphi(ax) - \varphi(x) \right| d\mu(x)\, d\lambda(a) = 0$$

コノ $\int \cdots\cdots d\lambda(a)$ ノ意味モ前ト同様デアル。E ガ Borel 集合デアルコトヨリ $|\varphi(ax) - \varphi(x)|$ ハ x, a ノ二変数ノ函数ト考ヘテ measureable トナルカラ Fubini ノ定理ガ應用デキテ

$$\int \left| \varphi(ax) - \varphi(x) \right| d\lambda(a) = 0 \qquad (1)$$

ガ almost all x ニ対シテ成立スル。即チ μ-measure ガ 0 ナ集合 M ガ定マリ $x \in G - M$ ニ対シテ (1) ガ成立スルノデアル。ヨッテ λ-measure ガ 0 ナ集合 E_x (コレハ x ニ depend スル!) ガ定マリ $a \in G - E_x$ ナルトキ

$$\varphi(ax) = \varphi(x) \qquad (2)$$

トナル。同様ニ任意ノ $y \in G - M$ ニ対シテ λ-measure ガ 0 ナ集合 E_y ガ定マリ $b \in G - E_y$ ナルトキ

$$\varphi(by) = \varphi(y) \qquad (3)$$

トナル。ヨッテ若シ適當ニ a, b ヲ取ッテ $ax = by$ ナラシメルコトガ出来レバ (2), (3) ヨリ $\varphi(x) = \varphi(y)$ トナリ、x, y

ガ $G-M$ ノ任意ノ点デアルコトヨリ

$$\varphi(x)=\text{const.}\quad x\in G-M,\quad \mu(M)=0$$

即チ $\mu(E)=0$ 又ハ $\mu(G-E)=0$ トナッテ(I) ノ証明ガ出来ルノデアル。

ヨッテ問題ハカヽル a, b ヲ撰ブコトニ帰スルノデアルガコレハλガ *right-invariant* ナルコトヨリ可能デアル。何トナレバ a ガ $G-E_x$ ヲウゴクトキ ax ハ $G-E_x\cdot x$ ヲウゴキ、同様ニ b ガ $G-E_y$ ヲウゴクトキ by ハ $G-E_y\cdot y$ ヲウゴキ、而モ $\lambda(E_x\cdot x)=\lambda(E_x)=0$, $\lambda(E_y\cdot y)=\lambda(E_y)=0$ ナルコトヨリ $(G-E_x\cdot x)\cdot(G-E_y\cdot y)=G-E_x\cdot x-E_y\cdot y\neq\Lambda$ (Λ: 空集合) トナルノデアル。

$\boxed{\text{(II) ノ証明}}$

G ヲ *locally compact, separable* ナ *group* トセヨ。

G ノ *left-invariant* ナ *measure* ガ *unique* デナイトスレバ G ノニツノ *left-invariant* ナ *measure* μ_1, μ_2 トニツノ *Borel* 集合 E_1, E_2 ガ存在シテ

$$\mu_1(E_1),\ \mu_2(E_1),\ \mu_1(E_2),\ \mu_2(E_2)>0$$

$$\frac{\mu_1(E_1)}{\mu_2(E_1)}>\frac{\mu_1(E_2)}{\mu_2(E_2)}$$

トナル。

$$\frac{\mu_1(E_1)}{\mu_2(E_1)} > \alpha > \frac{\mu_1(E_2)}{\mu_2(E_2)}$$

ナル *real number* α ヲトリ

$$\mu(E) = \mu_1(E_1) - \alpha\,\mu_2(E)$$

ヲ考ヘル。$\mu(E)$ ハ *total additive* ナ *set function* デコレハ任意ノ *compact* ナ範囲デ *bounded variation* デアル。ヨッテ任意ノ *open set* デソノ *closure* ガ *compact* ナモノ O ヲトレバ O ハ二ツノ *Borel* 集合 P, N ニ分レテ $(O = P + N,\ P \cdot N = \Lambda)$,

任意ノ $E \subset P$ ナル *Borel* 集合 E ニ対シテハ $\mu(E) \geqq 0$,

任意ノ $E \subset N$ ナル *Borel* 集合 E ニ対シテハ $\mu(E) \leqq 0$

トナル。先ヅコレヲ証明シヨウ。

O ニ於テ μ ハ *bounded variation* デアルカラ $E \subset O$ ナルアラユル *Borel* 集合 E ニ対スル $\mu(O)$ ノ上限 K ハ有限デアル。且ツ上限ノ性質ヨリ $E_n \subset O$, $\mu(E_n) > K - \frac{1}{2^n}$ ナル *Borel* 集合 E_n ガ存在スル。

$$P = \overline{\lim_{n=\infty}} E_n = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E_n,$$

$N = O - P$ トオケバ $O = P + N$ ガ求ムル分解デアル。何トナレバ先ヅ P, N ガ *Borel* 集合デ $P \cdot N = \Lambda$ ナルコトハ明カデアル。

次ニ $\mu(P) = K$ トナルコトヲ証明シヨウ。コレガ証明出来レバ任意ノ $E \subset P$ ナル *Borel* 集合ニ対シテ $\mu(E) \geqq 0$, 任意ノ $E \subset N$ ナル *Borel* 集合ニ対シテ $\mu(E) \leqq 0$ トナ

ルコトハ明カデアル。実際アル $E \subset P$ ニ對シテ $\mu(E)<0$ トナレバ $\mu(P-E)=\mu(P)-\mu(E)>K$ トナリ又 $E \subset N$ ニ對シテ $\mu(E)>0$ トナレバ

$$\mu(P+E)=\mu(P)+\mu(E)>K$$

トナリ何レモ矛盾ニ達スル。

ヨツテ證明ハ $\mu(P)=K$ ナルコトノ證明ニ歸スル。先ヅ任意ノ *Borel set* $A, B \subset O$ ニ對シテ

$$\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A\cdot B)$$
$$\geqq \mu(A)+\mu(B)-K$$

更ニ一般ニ任意ノ有限個ノ *Borel set* $A_i \subset O$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ニ對シテ

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \geqq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)-(n-1)K$$

ヨツテ

$$\mu\left(\sum_{n=m}^{m+p} E_n\right) \geqq \sum_{n=m}^{m+p} \mu(E_n)-p\cdot K$$

$$>\sum_{n=m}^{m+p}\left(K-\frac{1}{2^n}\right)-p\cdot K$$

$$=K-\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}\right)$$

$$>K-\frac{1}{2^{m-1}}$$

μ ハ *total additive* デアルカラ

$$K \geqq \mu\left(\sum_{n=m}^{\infty} E_n\right)=\lim_{p=\infty} \mu\left(\sum_{n=m}^{m+p} E_n\right)$$

$$\geqq K - \frac{1}{2^{m-1}}$$

ヨツテ再ビ μ ガ *total additive* ナルコトヲ用フレバ

$$K \geqq \mu(P) = \mu\left(\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} E_n\right)$$

$$= \lim_{m=\infty} \mu\left(\sum_{n=m}^{\infty} E_n\right) \geqq K$$

$$\therefore \quad \mu(P) = K$$

コノ分解ヲ用ヒテ更ニ G 全体ヲ同様ナ性質ヲモツタニツノ *Borel* 集合 P ト N トニ分ツコトヲ考ヘル。

假定ニヨリ G ハ *locally compact*, *separable* デアルカラ *closure* ガ *compact* デアル如キ open set O_i ($i=1,2,\cdots\cdots$) ヲ取リ $G=\sum_{i=1}^{\infty} O_i$ トナラシメルコトガ出来ル。(O_i, O_j, $i \neq j$ ハ共通点ヲ持ツテ井テモヨイ!)

コノ各々ノ O_i ハ上記ノ如ク *Positive part* P_i ト *negative part* N_i トニワカレル。

$$O_i = P_i + N_i, \quad P_i \cdot N_i = \Lambda.$$

シカモ任意ノ i, j ニ対シテ $\mu(P_i \cdot N_j) = 0$ トナル。コレハ $P_i \cdot N_j \subset P_i$ ナルコトヨリ $\mu(P_i \cdot N_j) \geqq 0$, $P_i \cdot N_j \subset N_j$ ナルコトヨリ $\mu(P_i \cdot N_j) \leqq 0$ トナルコトヲ考ヘレバ明カデアル。コノ P_i ニヨツテ

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i, \quad N = G - P$$

トオケバ $G = P + N$ ガ求ムル分解トナルコトハ明カデアル。

即チ P, N ハ明カニ *Borel* 集合デ $P \cdot N = \Lambda$, 且ツ任意ノ $E \subset P$ ナル *Borel* 集合 E ニ対シテハ $\mu(E) \geqq 0$, $E \subset N$ ナル *Borel* 集合 E ニ対シテハ $\mu(E) \leqq 0$ トナルコトモ明カデアル。

此ノ如ク G ヲ P ト N トニ分解スルトキハコノ P ガ (I) ノ條件ヲ満足シテヰル。即チ任意ノ $a \in G$ ニ對シテ

$$\mu(P \dotplus aP - P \cdot aP) = 0$$

トナツテヰル。何トナレバ

$$\begin{aligned} P \dotplus aP - P \cdot aP &= (P - P \cdot aP) + (aP - P \cdot aP) \\ &= P \cdot aN + aP \cdot N \end{aligned}$$

ニテ $\mu(P \cdot aN)$ ハ $P \cdot aN \subset P$ ナルコトヨリ $\geqq 0$, $P \cdot aN \subset aN$ ニテ μ ガ *left invariant* ナルコトヨリ $\leqq 0$ トナルカラ $\mu(P \cdot aN) = 0$ トナル。

又同様ニ $\mu(aP \cdot N) = 0$ トナルコトモ示サレ，且ツ $P \cdot aN$, $aP \cdot N$ ハ共通点ヲ持タナイカラ

$$\mu(P \dotplus aP - P \cdot aP) = \mu(P \cdot aN) + \mu(aP \cdot N) = 0$$

トナルノデアル。

ヨツテ、G ガ *ergodic* ナリトノ假定ヨリ（コレハ I デ証明シタコト）$\mu(P) = 0$ 又ハ

$$\mu(G - P) = \mu(N) = 0$$

デナケレバナラナイ。

然ルニ他方 μ ノ作リ方ヨリ $\mu(E_1) > 0$, $\mu(E_2) < 0$ デアルカラ $\mu(P) > 0$, $\mu(N) > 0$ デナケレバナラナイ。コレハ矛盾デアルカラ G ノ *left-invariant* ナ *measure*

ハ unique デナケレバナラヌ。（証明終）