655. 円, 球ノ幾何ニツイテ

松村 宗治（台北大）

$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ヲ R_3 内ノ球トシテ

$$(1) \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \quad i = \sqrt{-1}$$

ヲ考ヘルトキハ (1) ヨリ

$$(2) \quad (\mathfrak{w}\mathfrak{w}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) - (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) + 2i(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$$

デアルカラ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ガ互ニ垂直ヲナス場合ニハ $\mathfrak{w}$ ハ R_3 内ノ点デアルト考ヘラレ得。

尚、容易ニ $\mathfrak{m}$ ハ $\mathfrak{x}$ 及ビ $\mathfrak{y}$ 上ニ存在シナイコトが分ル。

次ニ吾々ハ別ニ

$$(3)\quad \overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$$

ヲ考ヘルトキハ $\overline{\mathfrak{m}}$ モマタ R_3 内ノ点ヲアラハシ得ベシ。
而シテ

$$(4)\quad \begin{aligned}(\mathfrak{m}\overline{\mathfrak{m}}) &= (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) + (\mathfrak{y}\mathfrak{y}) \\ &= 2\end{aligned}$$

ニヨリテ $\mathfrak{m}, \overline{\mathfrak{m}}$ ノ距離ノ平方ハ 2 ニ等シイコトニナル。
サテ今 $\mathfrak{p}$ ヲ R_3 内ノ一点トシテ

$$(5)\quad r = \frac{(\mathfrak{p}\mathfrak{m})}{(\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{m}})}$$

トオケバ r ハ $\mathfrak{p}$ ト $\mathfrak{m}$ トノ距離ノ平方ト $\mathfrak{p}$ ト $\overline{\mathfrak{m}}$ トノ距離ノ平方トノ比ニナル。

従ツテ $r=1$ ナルコトハ $\mathfrak{p}$ が二点 $\mathfrak{m}, \overline{\mathfrak{m}}$ ノ中点ナルコトヲ意味ス。

今一ツノ球 $\mathfrak{z}$ ヲ考ヘテ二点 $\mathfrak{m}, \overline{\mathfrak{m}}$ が共ニ $\mathfrak{z}$ 上ニ存在セバ

$$(6)\quad \begin{cases}(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) + i(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 0 \\ (\mathfrak{x}\mathfrak{z}) - i(\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 0\end{cases}$$

デアル。

(6)ヨリ

$$(7)\quad \begin{cases}(\mathfrak{x}\mathfrak{z}) = 0, \\ (\mathfrak{y}\mathfrak{z}) = 0\end{cases}$$

ヲ得ベシ。

(7)ヨリ分ルコトハ $\mathfrak{z}$ ハ $\mathfrak{x}$ 及ビ $\mathfrak{y}$ ニ垂直ナルコトデアル。

サテ α, β ヲ Skalare Gröszen トシテ

$$(8)\quad \alpha\mathfrak{m} + \beta\overline{\mathfrak{m}} = \alpha(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}) + \beta(\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}) = (\alpha+\beta)\mathfrak{x} + i(\alpha-\beta)\mathfrak{y}$$

ハ $\mathfrak{m}$ ト $\overline{\mathfrak{m}}$ トノ連結線上ノ点列ヲ表ス。

次ニ u, v ヲ Parameter トシテ

$$\mathfrak{m}(u, v)$$

ハ R_3 内ノ表面Sヲ表ス。

従ツテ S 上ノ垂直曲線群ヲ形成スル條件ハ

$$(9)\quad (\mathfrak{m}_u\, \mathfrak{m}_v) = 0$$

デアル。

(9)ヨリ

$$(10)\quad (\mathfrak{x}_u + i\mathfrak{y}_u,\ \mathfrak{x}_v + i\mathfrak{y}_v) = \{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v) - (\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v)\} + i\{(\mathfrak{y}_u\mathfrak{x}_v) + (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v)\} = 0$$

ヲ得ベク、従ツテ

$$(11)\quad \begin{aligned} (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v) &= (\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v), \\ (\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u) &= -(\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v) \end{aligned}$$

トナル、(11)ハ吾人ノ條件デアル。

更ニ例ノ通リ二次式

(12) $\delta\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{m}_i\, du^i)(\mathfrak{m}_k\, \delta u^k) = g_{ik}\, \delta u^i \delta u^k.$

但シ $g_{ik} = (\mathfrak{m}_i\, \mathfrak{m}_k)$

ヲ考ヘ得、アト普通ノ微分幾何ノ様ニ論ゼラル。

次ニ R_3 内ノ球 $\mathfrak{z}$ ヲ

(13) $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{y}$

ト考フ、ココニ ε ハ duale Zahlen デアル。

此ノ時

(14) $\cos\varphi = \varepsilon$

ガ成立ツ、ココニ φ ハ $\mathfrak{z}$ ト $\mathfrak{y}$ トノ間ノ角デアル。

尚

(15) $\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} - \varepsilon\mathfrak{y}$

ヲ考ヘルト $\bar{\mathfrak{z}}$ ハ R_3 内ノ球ニナル。

此ノトキ

(16) $\mathfrak{z}\bar{\mathfrak{z}} = 1$

ガ成立シ $\mathfrak{z}$ ト $\bar{\mathfrak{z}}$ トハ互ニ相接スル。

次ニ

(17) $\mathfrak{p} = \mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y} + \varepsilon\,\mathfrak{z}$

トオク、ココニ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ハ R_3 内ノ球デアル。

$\mathfrak{p}$ ハ従ッテ R_3 内ノ点ニナル。

而シテ

(18) $(\mathfrak{x}\mathfrak{p}) = 1,\quad (\mathfrak{y}\mathfrak{p}) = i,\quad (\mathfrak{z}\mathfrak{p}) = \varepsilon$

ガ成立スル。