# 653. 位相幾何學ノ形式化(II)

寺阪　英孝（阪大）

§3. 今度ハ $A^{acac}$ ナル operation ヲ考ヘヨウ。$A^{acac}$ ハ $(A^a)^{cac}$ 即チ $A$ ノ閉包ノ内部デアッテ, Kuratowski ノ所謂 ensemble régulier ouvert (Fund. Math. III) 又ハ domaine ouvert (Topologie I デ改稱) デアル、此処デハ前者ニ從ッテ正則開集合ト云フコトニスル。$A^{acac}$ ハ長イカラ：

（定義） $A^{acac}$ ヲ $A^\rho$ トカキ, $A$ ニ對スル正則開集合ト呼ブ。

先ヅ最初ニ

(13) $\quad A^{\rho\rho} = A^\rho$

（証） $A^{acacaca} = A^{aca}$ (Kuratowski ノ等式) ヲ証スレバヨイ。コレハ (i) $A^{aca} \supset A^{ac}$ (公理 $A_5$) ニ $C$ 及ビ $a$ ヲ交互ニホドコシ $A^{acac} \subset A^{acc} = A^a \longrightarrow A^{acaca} \subset A^{aa} = A^a \longrightarrow A^{acacac} \supset A^{ac} \longrightarrow A^{acacaca} \supset A^{aca}$.
(ii) 又 $A^{acac \cdot a} \supset A^{acac}$ カラ同様ニ $A^{acacaca} \subset A^{aca}$.
ヨッテ等式ヲ得ル。———

次ニ

(14) $\quad A \subset B \longrightarrow A^\rho \subset B^\rho$

(15) $\quad (A+B)^\rho \supset A^\rho + B^\rho$

(16) $\quad (AB)^\rho \subset A^\rho \cdot B^\rho$

ノ諸式モ $a$ 及ビ $C$ ノ operation デ譯無ク出セル。

次ニ $A^{\rho}=0$ ナル集合ヲ考ヘヨウ。

（定義） $A^{\rho}=0$ 即チ $A^{acac}=0$ ナル集合Aヲ粗集合（*nirgends dicht, non-dense*）ト云フ。

(14) カラ直グニ

(17) $A^{\rho}=0 \longrightarrow (AB)^{\rho}=0$ （粗集合ノ部分集合ハ粗）ガ出ル。更ニ

(18) $A^{\rho}=0 \rightarrow (A+B)^{\rho}=B^{\rho}$

(19) $A^{\rho}=0 \rightarrow (BA^{c})^{\rho}=B^{\rho}$ [即 $(A-B)^{\rho}=B^{\rho}$]

（集合ニ粗集合ヲ加ヘテモ引イテモ正則開集合ハ同ジニナル）

(証) (18) ノ証.

$$(A+B)^{acac} \underset{A_2}{=} (A^{a}+B^{a})^{cac} \underset{C_3}{=} (A^{ac}B^{ac})^{ac}$$

$B^{ac}$ ハ開集合ナル故 (11) ノ U ヲ $B^{ac}$ トシAヲ $A^{ac}$ トスレバ

$$(A^{ac}B^{ac})^{a} \supset A^{aca}B^{ac}$$

ヨッテ両辺ノ c ヲトレバ ⊃ ガ逆ニナッテ

$$(A^{ac}B^{ac})^{ac} \subset (A^{aca}B^{ac})^{c} = A^{acac}+B^{a}$$

$$\therefore \quad (A+B)^{\rho} \subset A^{\rho}+B^{a}=B^{a} \quad (\text{仮定ニヨリ } A^{\rho}=0)$$

$$\therefore \quad (A+B)^{\rho}=(A+B)^{\rho\rho} \subset B^{a\rho}=B^{\rho}$$

然ルニ (14) カラ $(A+B)^{\rho} \supset B^{\rho}$

ヨッテ両者ハ等シイ。

(19) ノ証

$$B^{\rho} \underset{(4)}{=} (BA+BA^{c})^{\rho} \underset{(17),(18)}{=} (BA^{c})^{\rho} \text{ ——}$$

(17), (18) ノ系トシテ

(20) $A^{\rho} = 0,\ B^{\rho} = 0 \longrightarrow (A+B)^{\rho} = 0,\ (AB)^{\rho} = 0$

（粗集合ノ和、積ハ矢張リ粗デアル）

粗集合ノ例ハ閉集合カラソノ内部ヲ引イタ残リ，即チ $A^{a} - A^{acac} = A^{a} A^{aca}$ デアル。式デイフト

(21) $(A^{a} A^{aca})^{\rho} = 0$ 又ハ $(A^{a} A^{\rho c})^{\rho} = 0$

（閉集合ノ境界ハ粗デアル。）

（証） 一般ニ $(A^{a} B^{a})^{a} = A^{a} B^{a}$ （閉集合ノ積ハ閉集合）ナコトガ証明出来ル。コレヲ使フト

$$(A^{a} A^{aca})^{acac} = (A^{a} A^{aca})^{cac} \underset{(10)}{=} A^{acac} A^{aca\cdot cac} \underset{A_3}{=} 0$$

Aナル集合ノ閉苞 $A^{a}$ カラAノ内部 $A^{cac}$ ヲ引イタモノ即チ $A^{a} - A^{cac} = A^{a} A^{ca}$ ガ粗デアルヨウナ集合Aヲ正則集合ト名ヅケコレヲ研究スルノデアルガ，ソノ為ニ先ヅ等式ヲ証明スル。

(22) $(A^{a} A^{c})^{\rho} = (A^{\rho} A^{c})^{\rho} = (A^{\rho} A^{ca})^{\rho} = (A^{a} A^{ca})^{\rho}$

$$= (A^{ca} A)^{\rho} = (A^{c\rho} A)^{\rho} = (A^{c\rho} A^{a})^{\rho}$$

（証）(i) $A^{a} \underset{(4)}{=} A^{a}(A^{aca} + A^{acac}) \longrightarrow A^{a} A^{c}$

$$= A^{a}(A^{aca} + A^{\rho}) A^{c} \subset A^{a} A^{aca} + A^{\rho} A^{c}$$

$$\xrightarrow[(21),(18)]{} (A^{a} A^{c})^{\rho} = (A^{\rho} A^{c})^{\rho}$$

(ii) $A^{\rho}$ ハ開ナル故 (12) ニ於テ $U = A^{\rho},\ A = A^{c}$ ト置ケバ

$$(A^{\rho} A^{c})^{a} = (A^{\rho} A^{ca})^{a} \longrightarrow (A^{\rho} A^{c})^{\rho} = (A^{\rho} A^{ca})^{\rho}$$

(iii) $A^{a} = A^{a}(A^{aca} + A^{acac}) \longrightarrow A^{a} A^{ca} = A^{a}(A^{aca} + A^{\rho}) A^{ca}$

$$\subset A^a A^{aca} + A^\rho A^{ca} \xrightarrow[(21),(18)]{} (A^a A^{ca})^\rho = (A^\rho A^{ca})^\rho$$

コレデ（22）ノ上ノ方ノ式ガ証明サレタ．サテ

$$A^a A^{ca} = (A^c)^{ca} (A^c)^a$$

ナル故，上式ノ A ノ代リニ $A^c$ ヲ入レレバ下ノ方ノ式ガ出ル。

（定義）　$(A^a A^{ca})^\rho = 0$　即　$(A^a - A^{cac})^\rho = 0$

即チ A ノ閉包カラ A ノ内部ヲ引イタ残ガ粗ナル如キ集合A ヲ正則集合トイフ。（22）ノドレカ一ツガ0ナラバヨイ。特ニ $(A^a A^c)^\rho = 0$ ガ便利デアル。

任意ノ A ニツキ $0 \subset A^a \cdot A^{aca}$ ソレ故 (21) ニヨツテ $0^\rho = 0$（0 ハ粗）、ヨツテ

(23)　閉集合，開集合，粗集合ハイヅレモ正則デアル。

$$A^a A^{ca} = (A^c)^{ca} (A^c)^a \quad \text{ダカラ}$$

(24)　A ガ正則ナラバ $A^c$ モ正則デアル。

(25)　正則集合ノ和、積ハ又正則デアル。式デハ

$$(A^a A^c)^\rho = 0,\ (B^a B^c)^\rho = 0 \longrightarrow ((A+B)^a (A+B)^c)^\rho = 0$$
$$((AB)^a (AB)^c)^\rho = 0$$

(証)　$(A+B)^a (A+B)^c = (A^a + B^a) A^c B^c \subset A^a A^c + B^a B^c$

及ビ　$(AB)^a (AB)^c \subset A^a B^a (A^c + B^c) \subset A^a A^c + B^a B^c$

カラ (20) ニヨツテ出ル。

次ニ両集合 A, B ニ対スル正則開集合 $A^\rho$, $B^\rho$ ガ等シイ為ノ條件ヲ出サウ。先ヅ

(26) $(AB^c)^\rho = 0 \longrightarrow A^\rho \subset B^\rho$

(証) $(AB^c)^\rho = 0 \longrightarrow A^\rho \underset{(4)}{=} (A(B+B^c))^\rho$

$$= (AB+AB^c)^\rho \underset{(18)}{=} (AB)^\rho \subset B^\rho$$

コレヨリ直チニ

(27) $(AB^c)^\rho = 0,\ (BA^c)^\rho = 0 \longrightarrow A^\rho = B^\rho$

集合ガ特ニ正則ナラバ、コノ逆モ成立ツノデアル。先ヅ

(28) $A^\rho \subset B^\rho,\ (B^\alpha B^{c\alpha})^\rho = 0$ （Bガ正則）

$$\longrightarrow (AB^c)^\rho = 0$$

(証) $(AB^c)^\rho \underset{(16)}{\subseteq} A^\rho B^{c\rho}$ （$A^\rho \subset B^\rho$ ナル故）$\subset B^\rho B^{c\rho}$

$$\underset{(10)}{=} (B^\alpha B^{c\alpha})^\rho = 0$$

ソレ故 A, B ガ共ニ正則ナラバ (27) ノ逆ガ成立ツ。即チ

(29) $A^\rho = B^\rho$, 且ツ A, B ハ正則 $\longrightarrow (AB^c)^\rho = 0$, $(BA^c)^\rho = 0$

又 A, B ガ正則デ $A^\rho = B^\rho$ ナラバ (29) ガ成立シ，従ッテ $((A^c)^c B^c)^\rho = 0$, $((B^c)^c A^c)^\rho = 0$ トナル故更ニ (27) ヲ適用スレバ $(A^c)^\rho = (B^c)^\rho$ トナル、即チ

(30) $A^\rho = B^\rho$ 且ツ A, B ハ正則 $\longrightarrow A^{c\rho} = B^{c\rho}$

(27) ト (29) ヲ用ヰレバ，更ニ

(31) $A^\rho = B^\rho$, A, B ハ正則. C ハ任意 $\longrightarrow (A+C)^\rho$

$$= (B+C)^\rho, \qquad \longrightarrow (AC)^\rho = (BC)^\rho.$$

証明スルニハ $((A+C)(B+C)^c)^\rho = 0$, $((B+C)(A+C)^c)^\rho = 0$ 等ヲ出シテ見レバヨイノデアル。

§4. コノ§デハ正則集合許考ヘルコトニスル。今記号トシテ

$A, B$ ガ正則デ $A^{\rho}=B^{\rho}$ ノトキ $A \approx B$

ト書クコトニスルト，$0^{\rho}=0$ ナル故（証略）

$A^{\rho}=0$ ハ $A \approx 0$

ト書ケル。コノ記号ヲ用ヰルト (27), (29), (30), (31) ハ夫々

$$(27)^{*} \quad AB^{c} \approx 0, \quad BA^{c} \approx 0 \longrightarrow A \approx B$$

$$(29)^{*} \quad AB^{c} \approx 0, \quad BA^{c} \approx 0 \longleftarrow A \approx B$$

$$(30)^{*} \quad A \approx B \longrightarrow A^{c} \approx B^{c}$$

$$(31)^{*} \quad A \approx B \longrightarrow A+C \approx B+C, \quad AC \sim BC$$

ト書ケル．$(31)^{*}$ ハ尚一般ニ

$$(32) \quad A \approx B, \quad C \approx D \longrightarrow A+C \approx B+D, \quad AC \approx BD,$$

$\approx$ ハ斯様ニシテ $=$ ト同様ノ性質ヲ持ツ譯デアル。

以上ノコトヲ利用シテ最初ノ問題ヲ考ヘテ見ヨウ。今正則開集合（$A^{\rho}=A$）ノミヲ採用スルコトトシ，ソレニツキ正則和ナルモノヲ次ノ様ニ定義スル。

$$A \oplus B = (A+B-AB)^{\rho} = ((A+B)(AB)^{c})^{\rho}$$

即チ

$$(33) \quad A \oplus B = (AB^{c}+BA^{c})^{\rho}$$

コウ定義シテカラ $\oplus$ ナル加法ガ *associative* デアルコトヲ証明シテ見ヨウ。即チ次式ヲ証明スルノデアル。

$$(34) \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

コノ左辺ハ

$$(A \oplus B) \oplus C = \{(AB^c + BA^c)^\rho C^c + (AB^c + BA^c)^{\rho c} C\}^\rho$$

ニ等シイ。今

$$AB^c + BA^c = D$$

ト置ケバ

$$(A \oplus B) \oplus C = (D^\rho C^c + D^{\rho c} C)^\rho$$

トナル。サテ A, B, C ハイヅレモ正則ナル故、定理 (24) ニヨッテ $A^c$, $B^c$, $C^c$ モ正則、従ッテ定理 (25) ニヨッテ D モ亦然リ、$D^\rho$ ハ勿論ノ事デアル、ヨッテ

$$D^{\rho\rho} = D^\rho \quad [(13)] \quad 即チ \quad D^\rho \approx D$$

カラ $(30)^*$, $(31)^*$, (32) ニヨッテ

$$D^\rho C^c + D^{\rho c} C \approx DC^c + D^c C$$

即チ、左辺ノ ρ ヲトッタモノハ右辺ノ ρ ヲトッタモノニ等シイ。由ッテ

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \oplus C &= \{(AB^c + BA^c) C^c + (AB^c + BA^c)^c C\}^\rho \\ &= (AB^c C^c + BA^c C^c + CA^c B^c + ABC)^\rho\end{aligned}$$

コレカラ容易ニ (34) ノ等式ガ出セル譯デアル。

$$(A \oplus B) C = AC \oplus BC$$

ナル分配律モ成立スルガ証明ハ略ス。

以上デ初メノ目的ハ達シタガ、コレダケデ店仕舞トスルノハ惜シイ。

コノ次ハ $A^{acaca}$ ナル *operation* ト所謂 *Baire* ノ性質トノ関係等ヲ出サウト思フ。