649. 代數函數ノ Riemann 面ニツイテ

河田　敬義（東大學生）

函数論デ代数函数ノ Riemann 面ヲツクルトキニハ，ソノ解析性ニヨツテ，解析接續等ノ理論ヲ用ヒテヰマスが、單ニ Riemann 面ノ Topologie ダケヲ考ヘルナラバモツト簡單ナ抽象的ナ性質カラ得ラレルノデハナイカトイフコトヲ考ヘタイト思ヒマス。

ヨク知ラレテヰルコトハ x ノ代数函数 y ノ Riemann 面 $\mathfrak{R}_y$ ニ屬スル有理型函数ノ全体が丁度代数函数体 $K = k(x, y)$，（k ハ複素数体）トナルコト，及ビソノ Riemann 面 $\mathfrak{R}_K$ ノ点ト K ノ k ノ元ヲ Einheit トスル Bewertung $\mathfrak{p}$ トが一對一ニ對應スルトイフコトデス。コレニ基イテ K ノスベテノ元 α ノ $\mathfrak{p}$ ニ於ケル値が $\mathfrak{p}$ ノ連續函数ニナルヤウニ $\mathfrak{p}$ ノ全体ニ Topologie ヲ導入シヤウト思ヒマス。目標ハ $\mathfrak{R}_K$ が geschlossene Fläche（Weyl ノイフトコロノ）ニナルトイフコトデス。以下次第ニ Axiom ヲタテ順次ニ

導クト思ヒマス。

（以下ハ末綱先生御指導ノセミナリーニ於テ生ジタモノデス。）

(1) k ガ algebraisch abgeschlossener Körper, x ハ k ノ上ニ transzendent, y ハ $\Omega = k(x)$ ノ上ニ algebraisch ナ元トシテ, $K = k(x, y)$ ノ k ノ元ヲ Einheit トスル Bewertung $\mathfrak{p}$ ヲ考ヘマス。特ニ $K = \Omega$ ノ場合ニハ $\Gamma = k[x]$ ノ Primideal $\mathfrak{p}_\alpha = (x-\alpha)$, $\alpha \in k$, 又ハ $\Gamma_\infty = k[\frac{1}{x}]$ ノ Primideal $\mathfrak{p}_\infty = (\frac{1}{x})$ ニヨル $\mathfrak{p}$-adische Bewertung トナリマス。一般ニハ Γ, Γ_∞ ニ ganz-abhängen スル K ノ元全体ヲ夫々 $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_\infty$ トシマスト, $\mathfrak{O}$ ノ Primideal 及ビ $\mathfrak{O}_\infty$ ノ $\mathfrak{p}_\infty$ ヲ割ル Primideal ニヨル $\mathfrak{p}$-adische Bewertung トナリマス。

$\mathfrak{p}$ ニ於ケル K ノ z ノ値 $z(\mathfrak{p})$ ヲ、$\mathfrak{p}$ デ $z = \sum \alpha_i t^i$, $\alpha_i \in k$ ト展開スル時, Pole ヲ有スレバ $z(\mathfrak{p}) = \infty$, ソウデナイ時ニハ $z(\mathfrak{p}) = \alpha_0$ ト定義シマス。 今 $z(\mathfrak{p}) = \bar{z}$ トオキマスト

1) $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in k$ ナラバ $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

2) $z \in k$ ナラバ $\bar{z} = z$

3) $\bar{z} = \infty$ トナルノハ $(\overline{\frac{1}{z}}) = 0$ ノ時ニ限ル。

ガ成立シマス。逆ニ

<u>Lemma 1.</u> <u>K ノ元 z ニ k ノ元又ハ ∞ ナル $\bar{z}$ ガ對應シテ 1) 2) 3) ガ成立テバ, 實ハアル K ノ Bewertung $\mathfrak{p}$ ガ存</u>

在ッテ $\overline{\alpha}=\alpha(\mathfrak{p})$ トナル。

コレハ Deuring. Math. Ann. 106. Zur arithmetische Theoriederalg. Funktionen §2 ニ述ベテアル事ノ特別ノ場合デス。

(2) k = Topologie ガ與ヘラレテ，次ノ條件ガ成立ットシマス。

(AI) k ハ Hausdorffscher Raum デ 1. Abzählbarkeitsaxiom ヲ満足スル。

(AII) $a_i \to a$. $b_i \to b$ ナラバ，$a_i \pm b_i \to a \pm b$,

$$a_i b_i \to ab, \quad \frac{a_i}{b_i} \to \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

(AIII) im Kleinen kompakt トナル。

之等ハ k ガ複素数体ノトキハ満足サレルコトデスガ，逆ニ之等ノ他ニ 2. Abz. axiom ヲ満足スル alg. abg. ナ Körper k ハ Dantzig ニヨリ複素数体シカナイコトガ知ラレテ居マス。（コレデ 2. Abz. axiom ハ不要デハナイノデセウカ?）

$a_i \to \infty$ トハ konvergent ナ Teilfolge ヲ含マヌコトヽシマストDantzig ニヨリ

(III') $a_i \to \infty$ トナルノハ $\frac{1}{a_i} \to 0$ ノ時ニ限ル。

ガ成立シマス。今 k ニ ∞ ヲ加ヘテ $k' = k + \infty$ ヲ kompakt ニシマス。

Def. K ノ Bewertung $\mathfrak{p}$ ノ全集合 $\mathfrak{R}_K$ デ，K ノスベテノ元 α ニツイテ $\alpha(\mathfrak{p}_i) \to \alpha(\mathfrak{p})$ ナルトキ $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ ト

スル。

コノ Def. ハ Lemma 1 ヨリ意味ヲ有シマス。コレデ $\mathcal{R}_K$ ガ Konvergenzraum トシテ Topologie ガ確定シマス。

<u>Satz 1. k ガ複素數体ナラバ上デ定義シタ $\mathcal{R}_K$ ハ通常ノ Riemann 面ト homöomorph トナル。</u>

⊙ 通常ノ Riemann 面ヲ $\overline{\mathcal{R}}_K$ トシマスト $\overline{\mathcal{R}}_K$ ト $\mathcal{R}_K$ トハ一對一ニ對應シテ，$\overline{\mathcal{R}}_K$ 上デ $\overline{\mathfrak{p}}_i \to \overline{\mathfrak{p}}$ ナラバ $\zeta(\overline{\mathfrak{p}}_i) \to \zeta(\overline{\mathfrak{p}})$. 即チ $\overline{\mathfrak{p}}_i \leftrightarrow \mathfrak{p}_i \in \mathcal{R}_K$ トシマスト Def. ヨリ $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ トナリ $\overline{\mathcal{R}}_K \to \mathcal{R}_K$ ガ stetig トナリマス。シカルニ $\overline{\mathcal{R}}_K$ ハ kompakt デスカラコノ對應デ homöomorph トナリマス。———

(3) 以下 Def. ト Axiom ダケカラ $\mathcal{R}_K$ ノ性質ヲ順次ニ出シテ行カウト思ヒマス。

<u>Satz 2. $K = k(x)$ ナラバ $\mathcal{R}_K$ ハ k' ト homöomorph トナル。</u>

⊙ $\mathfrak{p}_{\alpha_i} \to \mathfrak{p}_\alpha$ ナラ $x(\mathfrak{p}_{\alpha_i}) = \alpha_i$ ヨリ $\alpha_i \to \alpha$ トナリマス。逆ニ $\alpha_i \to \alpha$ ナラ K ノ元ハ $\zeta = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ト x ノ Polynom $f, g\ ((f,g)=1)$ デアラハサレ，$g(\alpha) \neq 0, \neq \infty$ ナラ

$$\zeta(\mathfrak{p}_i) = \frac{f(\alpha_i)}{g(\alpha_i)} \to \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \zeta(\mathfrak{p}_\alpha).$$

又 $g(\alpha) = 0$ ノ時ハ $\dfrac{1}{\zeta}$ ヲ考ヘ，$\alpha = \infty$ ナラ x ノカハリニ $\dfrac{1}{x}$ ヲ考ヘレバ、K ノスベテノ元 ζ ニツイテ $\zeta(\mathfrak{p}_{\alpha_i}) \to \zeta(\mathfrak{p}_\alpha)$ トナリ，Def. ヨリ $\mathfrak{p}_{\alpha_i} \to \mathfrak{p}_\alpha$ ト

ナリマス。——

シカルニ k' デハ homogen デスカラ ($x \leftrightarrow x-\alpha$, $x \leftrightarrow \frac{1}{x}$ ノ k' ノ自分自身ヘノ對應デ)、$\mathfrak{R}_K$ ノ各点 $\mathfrak{p}$ ノ Umgebung ハ k ノ 0 ノ Umgebung ト homöomorph トナリマス。

<u>Satz 3.</u> <u>$\mathfrak{R}_K$ ハ Hausdorffscher Raum トナル。</u>

証 $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ ノ Def. ヨリ $\mathfrak{R}_K$ デハ konvergent ナ Folge ノ Teilfolge モ konvergent トナリマスカラ Alexandroff-Hopf: Topologie S. 41, α) β) ガ成立マスカラ $\mathfrak{R}_K$ ハ topologischer Raum トナリマス。

Trennungsaxiom ヲ証明スルタメニ

<u>Lemma 2.</u> <u>$K \supset \Omega$ ナラバ、K ノ Bewertung $\mathfrak{p}$ ガ Ω ノ Bewertung $\bar{\mathfrak{p}}$ ヲ引キオコストキ $\mathfrak{p} \to \bar{\mathfrak{p}}$ ト對應サセレバ (コレヲ Projektion トイフコトニシマス) ハ $\mathfrak{R}_K$ ヲ $\mathfrak{R}_\Omega$ 全体ニ stetig ニ abbilden スル。</u>

証 Ω ノ元 $\bar{\xi}$ ニ對シテハ $\bar{\xi}(\mathfrak{p}) = \bar{\xi}(\bar{\mathfrak{p}})$ トナリマス。
$\therefore$ $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ ナラ特ニ Ω ノ元 $\bar{\xi}$ ガ $\bar{\xi}(\mathfrak{p}_i) \to \bar{\xi}(\mathfrak{p})$ トナリ Def. ヨリ $\bar{\mathfrak{p}}_i \to \bar{\mathfrak{p}}$. 即チ $\mathfrak{R}_K \to \mathfrak{R}_\Omega$ ハ stetig トナリマス。——

今 $\mathfrak{R}_K$ 上ニ二点 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ ヲトルト $x(\mathfrak{p}_1) = 0$, $x(\mathfrak{p}_2) \neq 0$ ニ x ヲトルコトガ出来マス。(Bewertung ノ理論カラ) $\Omega = k(x)$ トスルト $\mathfrak{R}_\Omega$ ハ Satz 2 カラ Hausdorffscher Raum デスカラ、$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ ノ $\mathfrak{R}_\Omega$ ヘノ Projektion ニヨル Bild ヲ $\overline{\mathfrak{P}}_1, \overline{\mathfrak{P}}_2$ トシマスト $\overline{\mathfrak{P}}_1 \neq \overline{\mathfrak{P}}_2$ ヨリ $\overline{U}_1(\overline{\mathfrak{P}}_1) \frown \overline{U}_2(\overline{\mathfrak{P}}_2) = 0$ ニ $\overline{\mathfrak{P}}_1, \overline{\mathfrak{P}}_2$ ノ Umgebung $\overline{U}_1, \overline{U}_2$ ヲトレマス。∴ ソノ Proj. ニヨル Urbild ヲ考ヘレバ $\mathfrak{R}_K$ デモ Trennungsaxiom ガ成立チマス。—

(4) 次ニ $\mathfrak{R}_K$ ノ kompakt ニツイテ。

イ) $K = k(x, y)$ ガ $\Omega = k(x)$ ノ上ニ galoissch ノ時ニ $\mathfrak{R}_K$ ガ kompakt ヲ証明出来レバ、一般ニハ K ヲ含ンデ $\overline{K}$ ヲ galoissch ニトレバ $\mathfrak{R}_{\overline{K}} \to \mathfrak{R}_K$ ノ Projektion ガ stetig ヨリ $\mathfrak{R}_{\overline{K}}$ ノ kompakt カラ $\mathfrak{R}_K$ ノ kompakt ガイヘマス。故ニ以下 K/Ω ヲ galoissch トシマス。

ロ) $\{\mathfrak{P}\}$ ナル無限集合カラ Teilmenge $\{\mathfrak{P}_i\}$ ヲトッテ、K ノスベテノ元 ξ デ $\xi(\mathfrak{P}_i) \longrightarrow \bar{\xi} \in k'$ ニナレバ、Lemma 1 ト (AII), (III′) カラ $\mathfrak{P}_i \to \mathfrak{P}$ ガイヘルコトニナリマス。k' ハ kompakt デスカラ K カラ abzählbar ノ元 $\{\xi\}$ ヲトリ、ソレニ對シテ $\xi(\mathfrak{P}_i) \longrightarrow \bar{\xi}$ トナルヤウニ出来マス。故ニ問題ハ適當ニ abzählbar ノ $\{\xi\}$ ヲトッテ $\xi(\mathfrak{P}_i) \longrightarrow \bar{\xi}$ トナレバ他ノ元 u デハ自ラ $u(\mathfrak{P}_i) \to \bar{u}$ トナル様ニスレバヨイコトニナリマス。

<u>Lemma 3.</u> <u>K/Ω ガ galoissch ナルトキニ、ソノ Galois 群 $\mathfrak{G}$ ノ元 σ ヲトルト $\xi(\mathfrak{P}) = \xi^\sigma(\mathfrak{P}^\sigma)$, 且ツ $\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}^\sigma$ ナル對應ハ $\mathfrak{R}_K$ ヲ自分自身全体ニ homöomorph ニ abbilden スル。</u>

⊙ $\mathfrak{p}$ ニ属スル Bewertungsring ヲ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$，ソノ Primideal ヲ $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}$ トスルト $(\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}})^{\sigma}=\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}^{\sigma}}$，$(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}})^{\sigma}=\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}^{\sigma}}$ トナリマス。($\mathfrak{p}^{\sigma}$ ノ定義ヨリ)。 ∴ $z(\mathfrak{p})=\infty$，即チ $z \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ ナラ $z^{\sigma} \notin \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}^{\sigma}$ 故 $z^{\sigma}(\mathfrak{p}^{\sigma})=\infty$. $z(\mathfrak{p}) \in k$ ナラ $z-z(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}$，∴ $z^{\sigma}-z(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}^{\sigma}}$ ∴ $z^{\sigma}(\mathfrak{p}^{\sigma})=z(\mathfrak{p})$. 後半ハ之ヲ用ヒレバ Def. ヨリ出マス。———

ハ) K ヲ y_0 ノ満足スル $\Omega=k(x)$ ノ既約方程式又ハソノ適当ナ巾ヲ $f(x,y)=0$ トスルト

$$f(x\ y)=(y-y_0)(y-y_0^{\sigma_2})\cdots\cdots(y-y_0^{\sigma_n}),$$

$$\sigma_i \in \mathfrak{G}.$$

∴ $z \to z(\mathfrak{p})$ ナル homomorph ナ對應デ $x(\mathfrak{p}) \neq \infty$，$y_0^{\sigma_i}(\mathfrak{p}) \neq \infty$ ナラ、Lemma 3 ヲ用ヒテ

$$f(x(\mathfrak{p})\ y)=(y-y_0(\mathfrak{p}))(y-y_0^{\sigma_2}(\mathfrak{p}))\cdots\cdots(y-y_0^{\sigma_n}(\mathfrak{p}))$$
$$=(y-y_0(\mathfrak{p}))(y-y_0(\mathfrak{p}^{\sigma_2}))\cdots\cdots(y-y_0(\mathfrak{p}^{\sigma_n}))$$

今度ハ $x(\mathfrak{p}_i) \to \alpha_0 \neq \infty$，$y_0(\mathfrak{p}_i) \to \beta_0 \neq \infty$ ナラ $f(\alpha_0\beta_0)=0$. (A II ヨリ)。 ∴ Ω ノ $\mathfrak{p}_{\alpha_0}$ ノ K デノ Teiler ヲ $\mathfrak{p}_1^{0},\cdots\cdots\mathfrak{p}_g^{0}$ ノ $\mathfrak{p}_{\alpha_0}=(\mathfrak{p}_1^{0}\cdots\cdots\mathfrak{p}_g^{0})^{e}$，$eg=n=(K:\Omega)$ トスレバ $\beta_0=y_0(\mathfrak{p}^{\sigma_i})$ トナリマス。

今 $K=k(x\,y)$ トシテ，$y(\mathfrak{p}_j) \neq \infty$ トシマス。($=\infty$ ニナルトキハ y ノカハリニ $y(x-\alpha_0)^N$ ヲ代用シマス。)

又、$\alpha_0 \neq \infty$ トシマス。($=\infty$ ナラ $x=\frac{1}{x}$ ヲ代用シマス)

サテ $\mathfrak{O}$ カラ（ⅰ）デ定義シタトコロノ．$t = 0(\mathfrak{p}_1^0)$, $\neq 0(\mathfrak{p}_1^{0\,2})$, $\neq 0(\mathfrak{p}_2^0)$, ………, $\neq 0(\mathfrak{p}_g^0)$ トナルtヲトリマス。

（ニ）今 $\{\mathfrak{p}\}$ ナル無限集合カラ $\{\mathfrak{p}_i\}$ ヲ取リ，$x(\mathfrak{p}_i) \to \alpha_0 \neq \infty$, $y(\mathfrak{p}_i) \to \beta_0 \neq \infty$, $t^{\sigma_j}(\mathfrak{p}_i) \to \gamma_j$ トナル様ニシマス。コヽデ $\gamma_j \neq \infty$ トナルコトハ（ハ）ヨリワカリマス。（$t(\mathfrak{p}^{\sigma_i}) \neq \infty$ ナルコトカラ）。

且ツ $\gamma_1, \cdots\cdots \gamma_n$ 中 0 トナルモノガ e ケアリマス。カカルーツヲ γ_1 トシマス。又 $(x-\alpha_0) \mid N_{K,\Omega}\, t$ in Γ デスカラ

$$\lim_{i\to\infty} \frac{N_{K\Omega}\, t(\mathfrak{p}_i)}{x(\mathfrak{p}_i)-\alpha_0} \to endl.$$

$$\therefore \lim_{i\to\infty} \frac{t^e(\mathfrak{p}_i)}{x(\mathfrak{p}_i)-\alpha_0} = endl.$$

トナリマス。

（ホ）$\mathfrak{p}_1^0, \cdots\cdots \mathfrak{p}_g^0$ デ Pole ヲモタヌ K ノ元全体ノナス Ring ヲ $\overline{\mathfrak{O}}$ トスルト $z(\mathfrak{p}_i) \to \bar{z}$ トナルトスルト（ハ）ヨリ $\bar{z}$ ハ endl. トナリマス。$x, y, t, t^{\sigma_2}, \cdots\cdots t^{\sigma_n} \in \overline{\mathfrak{O}}$ デス。

今、$\bar{z} = 0$ ナルトキニ $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{z}{t}(\mathfrak{p}_i)$ ガ存在スルトキニハ必ズ endl. トナリマス。何故ナラ $\overline{\mathfrak{O}}$ デ $t\overline{\mathfrak{O}} = \overline{\mathfrak{p}_1^0}$, $\overline{\mathfrak{O}}/\overline{\mathfrak{p}_1} \cong k$ ヨリ $z = \delta + s\cdot t$, $\delta \in k$, $s \in \overline{\mathfrak{O}}$ ト置クト，$z(\mathfrak{p}_i) = \delta + s(\mathfrak{p}_i)\, t(\mathfrak{p}_i) \to 0$ ヨリ $\delta = 0$，即チ

$$\frac{z}{t}(\mathfrak{p}_i) = s(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow endl.$$

トナリマス。

（ヘ）以上ヨリ（ロ）ノ方法ニヨツテ

$$\frac{x(\mathfrak{p}_i)-\alpha_0}{t(\mathfrak{p}_i)} \longrightarrow \alpha_1, \quad \frac{x(\mathfrak{p}_i)-\alpha_0-\alpha_1 t(\mathfrak{p}_i)}{t(\mathfrak{p}_i)} \to \alpha_2, \cdots\cdots \frac{y(\mathfrak{p}_i)-\beta_0}{t(\mathfrak{p}_i)} \to \beta_1.$$

$$\frac{y(\mathfrak{p}_i)-\beta_0-\beta_1 t(\mathfrak{p}_i)}{t(\mathfrak{p}_i)} \longrightarrow \beta_2, \cdots\cdots$$

トナル様ニ $\{\mathfrak{p}_i\}$ ヲ(ニ)ニモトメタ中カラエラビ出シマス。(ソレヲ再ビ $\{\mathfrak{p}_i\}$ トカキマス)。

コヽデ分子ニ出テ来ルモノハ $\overline{\Theta}$ ノ元デスカラ(ホ)ヨリ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$ ハ endl. トナリマス。又(ニ)ニ云ッタマヽデ $\alpha_1 \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$, 中ニ 0 デナイモノガ生ジマスッ ソノ初メノモノヲ α_r トシマス。

(チ) K ノ元 ξ ヘ $\xi = \frac{1}{g(x)}(f_0(x) + f_1(x)\cdot y + \cdots\cdots + f_{n-1}(x)\, y^{n-1})$, $g, f_j \in \Gamma$ トカケマス。

$(x-\alpha_0)^s \| g(x)$ トシテ $g(x) = (x-\alpha_0)^s g_1(x)$ トオキ,

(ト)カラ

$$\left.\begin{array}{ll} x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots\cdots + \alpha_{rs} t^{rs} + x_1 t^{rs}, & x_1(\mathfrak{p}_i) \to 0 \\ y = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots\cdots + \beta_{rs} t^{rs} + y_1 t^{rs}, & y_1(\mathfrak{p}_i) \to 0 \end{array}\right\}$$

トナリマスカラ代入シテ

$$\xi = \frac{1}{g_1(x)\frac{(x-\alpha_0)^s}{t^{rs}}}\left(\frac{1}{t^{rs}}(f_0(x) + \cdots\cdots + f_{n-1}(x)\, y^{n-1})\right)$$

$$= \frac{1}{g_1(x)\left(\frac{x-\alpha_0}{t^r}\right)^s}\left(\frac{F(t)}{t^{rs}} + G(t, x, y)\right)$$

コヽニ $F(t)$, $G(t, x, y)$ ハ夫々ノ文字ノ Polynom トナリマス。

∴ コヽデ $g_1(x(\mathfrak{p}_i)) \longrightarrow g_1(\alpha_0) \neq 0$,

$$\frac{x(\mathfrak{p}_i)-\alpha_0}{t^r(\mathfrak{p}_i)} \to \alpha_r \neq 0, \quad F(t(\mathfrak{p}_i)) \to F(0)$$

$$G(\mathfrak{p}_i) \to G(0,0,0)$$

トナリマスカラ $\mathfrak{z}(\mathfrak{p}_i) \to \bar{\mathfrak{z}}$ ト konv. シマス。故ニ以上カラ

<u>Satz 4. $\mathfrak{R}_K$ ハ kompakt トナル。</u>

(5) $\mathfrak{R}_K$ ノ kompakt カラ他ノ性質ハ容易ニ出テ来マス。

<u>Satz 5. $\mathfrak{R}_K$ デハ 1. abz. axiom ガ満足サレテキル。</u>

∵ $\Omega = k(x)$ トスルト $\mathfrak{R}_\Omega$ デハ Satz 2 ヨリ成立シマス。一般ニ $\mathfrak{R}_K$ ノ点 $\mathfrak{p}$ ヲトリ, $\mathfrak{R}_\Omega$ ヘノ Proj. ニヨル Bild ヲ $\bar{\mathfrak{p}}$ トシマス。$\bar{\mathfrak{p}}$ ノマハリデノ abz. ノ Basis ヲ $\bar{U}_i(\bar{\mathfrak{p}})$ ヲトリ、ソノ Proj. ノ Urbild ヲ $U_i(\mathfrak{p})$ トシマス。一方 Trennungs-axiom ヨリ $\mathfrak{p}$ ノ適当ナ Umgebung U_0 ヲトリ、$\bar{\mathfrak{p}}$ ヲ割ル K ノ $\mathfrak{p}$ 以外ノ Teiler ハ U_0 ノ abgeschlossene Hülle ニ入ラヌヤウニ出来マス。$U_0 \cap U_i = U_i'$ トスレバ、コレガ求メルモノニナリマス。若シソウデナイトスルトアル $\mathfrak{p}$ ノ Umgebung U ヲトルト、スベテノ U_i' ハ U ニ入ラヌ点 $\mathfrak{p}_i$ ヲ含ミマス。$\mathfrak{R}_K$ ノ kompakt ヨリソノ集積点ヲ $\mathfrak{p}'$ トスルト Proj. $\bar{\mathfrak{p}}_i$ カラ考ヘレバ $\bar{U}_i$ ノ性質カラ $\bar{\mathfrak{p}}' = \bar{\mathfrak{p}}$ トナリ, U_0 ノ取リ方カラ $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ トナリ U ノ取リ方ニ矛盾シテ来ルカラデス。———

<u>Satz 6. $\mathfrak{R}_K$ ノ任意ノ点 $\mathfrak{p}$ ノ適当ナル Umgebung ハ</u>

k ノ O ノ *Umgebung* ト *homöomorph* トナル。

∵ 今マデ一次ノ O トナル元 x ヲトリ K/Ω ($\Omega = k(x)$) ガ *galoisch* トシマス。(1) デ定義シタ Γ ノ $\mathfrak{p}_0$ ハ Θ デ $\mathfrak{p}_1$ -------- $\mathfrak{p}_n$ ($n = (K:\Omega)$) ト分解シマス。$\mathfrak{R}_\Omega$ デハ Satz 2 ヨリ成立スルノデスカラ $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ ノ適當ナ Umg. ガ $\mathfrak{R}_\Omega$ ノ $\mathfrak{p}_0$ ノ Umg. ト *homöomorph* ヲイヘバヨイコトニナリマス。Satz 5 ヨリ $\mathfrak{p}$ ノマハリニ abz. ナ Basis $U_i(\mathfrak{p})$ ヲトル時ニ i ヲ充分大ニスルト U_i ハ $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^\sigma$ (σ ハ K/Ω ノ Galois 群ノ元) ヲ同時ニ含ミマセン。サウデナイトスルト U_i ヲ $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i^\sigma$, $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_i^\sigma \to \mathfrak{p}$. トナリ、一方 Lemma 3 カラ $\mathfrak{p}_i^\sigma \to \mathfrak{p}^\sigma$ トナリ $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^\sigma$ ニ反スルカラデス。逆ニ Satz 5 ノ証明ト同様ニ $\mathfrak{p}_0$ ノ適當ナ Umg. ハ $\mathfrak{p}$ ノアル Umg. ノ Bild ニ含マレマスカラ $\mathfrak{p}$ ト $\mathfrak{p}_0$ ノ適當ナ Umg. ハ Proj. ニヨツテ一對一ニ對應シマス。シカルニ $\mathfrak{R}_K$ ノ kompakt ト、Proj. ノ stetig ヨリ之レ等ハ互ニ *homöomorph* ニナリマス。K/Ω ガ *galoisch* デナイ時ニハ $\overline{K}$ ヲ K ヲ含ンデ Ω ノ上ニ *galoisch* ニトレバ上ト同様ニ証明出來マス。————

(6) 今、k ニ更ニ條件ヲ加ヘマス。

(AIV) k ハ *zusammenhängend* (z. h.) デアル。

<u>Satz 7. $\mathfrak{R}_K$ モ z. h. トナル。</u>

∵ k ノ z. h. カラ $k' = k + \infty$, 從ツテ Satz 2 オラ $\mathfrak{R}_\Omega$ ($\Omega = k(x)$) モ z. h. ニナリマス。一般ニハ

Riemann Roch ノ定理カラ一点 $\mathfrak{p}_\infty$ デ Pole トスル K ノ元 x ガ存在シマス。即チ K/Ω デ $\mathfrak{p}_\infty$ ハ vollverzweigen シマス。今 K' ヲ K/Ω ヲ含ム galois 体トシマス。今 $\mathfrak{R}_K=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, ($\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=0$, $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$: offen) ト分解サレルトシマスト $\mathfrak{R}_{K'}\to\mathfrak{R}_K$ ヘノ Proj. ニヨル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ ノ Urbild ヲ $\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'$ トシマスト $\mathfrak{R}_{K'}=\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'$. ($\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{b}'=0$, $\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'$: offen) トナリマス。

今 $\mathfrak{a}\ni\mathfrak{p}_\infty$ トシマスト $\mathfrak{a}'$ ハ K' ニ於ケル $\mathfrak{p}_\infty$ ノスベテノ Teiler ヲ含ミマス。σ_i ヲ K'/Ω ノ galois 群 $\mathfrak{G}$ ノ元トシマスト Lemma 3 ヨリ $\mathfrak{a}'^{\sigma_i}$, $\mathfrak{b}'^{\sigma_i}$ モ offen トナリスベテノ $\mathfrak{p}_\infty$ ノ Teiler ヲ含ミマス。

$$\mathfrak{a}_0=\prod_{\sigma_i\in\mathfrak{G}}\mathfrak{a}'^{\sigma_i},\quad \mathfrak{b}_0=\sum_{\sigma_i\in\mathfrak{G}}\mathfrak{b}'^{\sigma_i}$$ モ offen デ

$\mathfrak{R}_{K'}=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{b}_0$ ($\mathfrak{a}_0\cap\mathfrak{b}_0=0$, $\mathfrak{a}_0,\mathfrak{b}_0$: offen) ノ他ニ $\mathfrak{a}_0^{\sigma_i}=\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0^{\sigma_i}=\mathfrak{b}_0$ トナリマス。∴ コノ $\mathfrak{R}_\Omega$ ヘノ Proj. ヲ $\overline{\mathfrak{a}}_0,\overline{\mathfrak{b}}_0$ トスルト, $\overline{\mathfrak{a}}_0\ni\mathfrak{p}_\infty$ トナリ、$\mathfrak{R}_\Omega=\overline{\mathfrak{a}}_0+\overline{\mathfrak{b}}_0$ ($\overline{\mathfrak{a}}_0\cap\overline{\mathfrak{b}}_0=0$, $\overline{\mathfrak{a}},\overline{\mathfrak{b}}_0$: offen. (コレハ $\mathfrak{R}_{K'}$ ノ kompakt ヨリ) トナリ、矛盾トナリマス。∴ $\mathfrak{R}_K$ ハ z.h. トナリマス。——

更ニ k ニ條件ヲ加ヘテマリマス。

(AV) k ノ 0 ノ Umgebung ハ Euclid 平面ノ単位円ト homöomorph デアル。

<u>Satz. $\mathfrak{R}_K$ ハ geschlossene Fläche</u> トナル。

⊙ 以上Satz 2,……Satz 7ヲ綜合スレバ, triangulierbar. (AV) トSatz 4カラ出マスカラ $\mathfrak{K}_K$ ハ geschlossene Fläche トナリマス。———

—— (終) ——