644. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, XIV

福原　満洲雄（九大）

1. XII, XIII デ述ベタ結果ノ中デ関係ノアル部分ダケヲ繰返シテ述ベテ置ク。

$$(1)\quad \frac{dy}{dt}=yf(t,y)$$

ノ右辺 $f(t,y)$ ハ漸近的ニ

$$(2)\quad f(t,y)\sim\sum_{j,k}a_{jk}e^{jt}y^{k}$$

$$(a_{00}=\cdots\cdots=a_{0,n-1}=0,\ a_{0n}\neq 0)$$

ナル形ニ展開サレルモノトスル。(1) ノ形式的ノ解トシテ

$$(3)\quad y\sim z\sum_{j,k}p_{jk}e^{jt}z^{k}$$

$$(4)\quad z=\left(\frac{a'}{a}w\left(-\frac{na^{2}}{a'}(t+c)\right)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

ヲ得ル、茲ニ $w(\tau)$ ハ $w(0)=0$ ヲ満足スル

$$\frac{dw}{d\tau}=1+w^{-1}$$

ノ解デアツテ τ^{-1}. $\tau^{-1}\log\tau$ ガ十分ニ小サイ時

$$(5)\quad w(\tau)=\tau(1+\tau^{-1}\log\tau+\cdots\cdots)$$

ナル形ニ τ^{-1}. $\tau^{-1}\log\tau$ ノ収斂ナ冪級数ニ展開サレル。

$$y=z\left(\Sigma_{N-1}\,p_{jk}e^{jt}z^{k}+u\right)$$

ト置イテ得ラレル u ニ関スル方程式

$$\text{(6)} \quad \frac{du}{dt}=g(t,z,u)$$

ガ $u=O(t^{-\frac{M'}{u}})$ (M' ニ関シテ前回参照) ヲ満足スル解ヲ唯一ツ持ツコトヲ証明シ, ソレニ對應スル (1) ノ解ヲ $y=z\Phi(t,C)$ ト表ハス。(前回ハ $y=\Phi(t,C)$ ト書イタガ大シタ問題デハナイ)。z ハ (4) ニ依ッテ定義サレル変数トシ, $\Phi(t,C)=\varphi(t,z)$ ニ依ッテ t,z ノ函数 $\varphi(t,z)$ ヲ定義スル。結論ハ屡々言フヤウニ $y=z\varphi(t,z)$ ヲ t,z ノ函数ト考ヘタトキ漸近的ニ (3) ナル形ニ展開サレルコトデアル。

2. 前回ニ於テハ $\Phi(t,C)$ ガ N ニ関係シナイ理由ヲ説明シナカッタ. ソレヲ示スニハ解ノ單独條件ニ注意スレバヨイノデアル。$u=O(t^{-\frac{m}{n}})$ ヲ満足スル (6) ノ解ガ唯一ツデアルヤウニ N ニ関係シナイ m ヲ取ルコトガ出來ルコトニ注意スル、$\Phi(t,C)$ ハ N ニ関係スルカモ知レナイカラ $\Phi_N(t,C)$ ト書クコトニスル。

$N'>N$ トスレバ

$$u=\Phi_{N'}(t,C)-\sum_{N-1} P_{jk}e^{jt}z^k$$

ハ (6) ノ解デ $u=O(t^{-\frac{m}{n}})$ ヲ満足スルデアラウ、ソノヤウナ (6) ノ解ハ唯一ツデアルカラソレニ對應スル (1) ノ解ハ $z\Phi_N(t,C)$ デナケレバナラナイ。此ノヤウニシテ $\Phi_N(t,C)$ ガ N ニ関係シナイコトガ分ル、従ッテ $\varphi(t,z)$ モ N ニ関係シナイノデアル。

3. 扨 t_0, z_0 ニ於テ

$$(7)\quad \left|\varphi(t,z)-\sum_{N-1} p_{jk}\, e^{jt} z^k\right| \leqq K\left(|e^{Mt}|+|z|^{M'}\right)$$

ガ成立スルコトノ證明デアル。(4) ニ依ッテ t_0, z_0 ニ對應スル C ノ値ヲ C_0 トスル、(6) ノ右辺ガ含ム $C=C_0$ ナル値ヲ與ヘ，コノ方程式ガ t_0 ヲ含ミ ∞ マデ伸ビテ居ル曲線 Γ ノ上デ

$$|u| \leqq K\left(|e^{Mt}|+|z|^{M'}\right)$$

ヲ滿足スル（z ガ含ム C ニハ C_0 ナル値ヲ與ヘル）解ヲ持ツコトヲ存在定理ヲ使ッテ證明スルノデアル、ソノヤウナ解ハ $u=O\left(t^{-\frac{M'}{n}}\right)$ ヲ滿足スルカラ解ノ單獨性ニヨリ，ソレガ

$$u=\varphi(t,z)-\sum_{j,k}{}_{N-1}\, p_{jk}\, e^{jt} z^k$$

ニ於テ $C=C_0$ ト置イタモノニナル。依ッテ t_0, z_0 ニ於イテ (7) ヲ得ル。

此ノヤウニ結論シ得ルタメニハ t_0, z_0 ガドノヤウナ範囲ニアレバヨイカヲ調ベルコトニ依ッテ漸近展開ノ問題ハ解決スル。

4. $\varphi(t,z)$ ノ z ニ関スル微分可能性，正則性ガ如何ニシテ證明サレルカトイフコトハ既ニ前回ニ於イテ述ベタ、ウルサイコトハ言ハズニ級数 (2) ハ收斂デソノ和ガ $f(t,y)$ デアルトシヨウ。此ノ場合ニハ $\varphi(t,z)$ ガ e^t ノ收斂ナ冪級数ニ展開サレルコトノ理由ヲ説明シヨウ、級数 (2) ガ收斂

デソノ和ガ $f(t,y)$ デアルトイフコトハ $f(t,y)$ ガ t ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルトイフコトニ他ナラナイ（尤モ y ニ関スル $y=0$ ニ於ケル正則性ヲ假定シテノ話、$f(t,y)$ ヲ $e^t=x$ ノ函数ト考ヘタトキ $x=0$ ノ近傍デ一様有界、從ツテ $x=0$ ガ除去可能ノ特異点トナルカラデアル、）又 $\varphi(t,z)$ ガ e^t ノ收斂ナ冪級数ニ展開サレルトイフコトハ $\varphi(t,z)$ ガ t ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルトイフコトニ他ナラナイ. z ハ t ヲ $t+2\pi i$ デ, C ヲ $C-2\pi i$ デ置換ヘテモ変ラナイカラ

$$\varphi(t+2\pi i, z) = \Phi(t+2\pi i, C-2\pi i)$$

デアル、$f(t,y)$ ノ週期性ニヨリ (6) ノ右辺 $g(t,z,u)$ モ t ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスル。

依ツテ

$$u = \Phi(t+2\pi i, C-2\pi i) - P_N(t,z)$$

ハ $u = O(t^{-\frac{M'}{n}})$ ヲ満足スル(6)ノ解デアル、ソノヤウナ解ハ唯一ツデアルカラ

$$\Phi(t+2\pi i, C-2\pi i) = \Phi(t, C)$$

トナラナケレバナラナイ、コレニ依ツテ $\varphi(t,z)$ ガ t ニ関シテ $2\pi i$ ヲ週期トスルコトガ分ル、コレカラ $\Phi(t,C)$ ヲ $x=e^t$ ノ函数ト考ヘタトキ $x=0$ ガ通常超越点デアルコトモ分ル。

コノヤウニ漸近展開ノ問題ガ解決スルト級数ノ收斂問題モ片附イテ行ク。

$\varphi(t,z)$ ヲ z ノ冪級数ニ展開シテモ一般ニ收斂シナイ

ソレハ何故カ，説明スルコトモ出來ルガ否定的ノ結果デアルカラ省略シテ置ク。

5. 以上3面ニ亘ッテ微分方程式 (1) ノ解ノ漸近展開ノ問題ヲ扱フ方針ヲ述ベタ、併シコノ方針ハコノ場合ノミニ有效ナノデハナイ。ソノ應用範囲ノ廣イコト，証明ニ殆ンド技巧ヲ要シナイコト，而モ同ジ結論ニ達スルノニ逐次近似法ナドヨリ計算ガ樂ナコトナドガ私ガ特ニ强調シタイ点ナノデアル。

方程式ノ形ガ與ヘラレタラ，先ヅ形式的ノ解ヲ求メル、次ニソレヲ漸近展開トスル解ノ存在ト單独性ヲ確メルタメ形式的ニ得タ級数ヲ途中デ切ッテ夕トノ差ヲ作リ，ソノ差ニ関スル方程式ニ解ノ存在定理及ビ單独條件ニ関スル定理ヲ應用スル、勝手ナ常数 C ガ入ッテ居ル場合ニハ補助変数ヲ含ム微分方程式ニ関スル定理ヲ使ッテ C ニ関スル性質ヲ調ベル、ソレデ漸近展開ノ問題ハ片ガ附ク、更ニ原点ガ除去可能ノ特異点デアルカ否カヲ調ベルコトニ依ッテ級数ノ收斂性ガ分ル、何ノ躊躇モナク証明ガ進メラレ確実ニ結果ヲ掴ンデ行ケル、コンナ方法ガ今マデ何故使ハレナカッタカト不思議ニ思ハレル位デアル。カウナルト残ッタ場合ヲ風潰シニ片附ケルコトナドハ單ナル根氣仕事ニ過ギナクナッテ了フ。