643. 円,球ノ幾何ニツイテ

松村　宗治（台北大）

（I）　R_3 内ニ円 $\mathfrak{k}$, $\overline{\mathfrak{k}}$ ガアリ $\mathfrak{k}$ ヲ通ル球 $\mathfrak{K}^{\alpha}$ ガ $\overline{\mathfrak{k}}$ トナス角ヲ φ トセバ

(1) $\cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta$

ナルコトヲ前ニ自分ハコヽデモ述ベタ、コヽニ

(2) $A^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta = 1$

デアル、サテ φ ガ φ_0 ナル與値ヲトレバ $\cos^2\varphi_0 = K^2$ トオキ

(3) $\left(T^{\alpha\beta} - K^2 A^{\alpha\beta}\right)\rho_\alpha\rho_\beta = 0$

デアル。(3) ヨリ $\rho_1 : \rho_2$ ノ値ガ二ツ求マル、ソレヲ

$$\alpha : \beta ;\quad \bar{\alpha} : \bar{\beta}$$

トシ

(4) $D = \dfrac{\alpha}{\beta} : \dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$

トオケバ此 D ヲバ $T^{\alpha\beta}$, K, $A^{\alpha\beta}$ デ表ハシ得ベクソノ D ヨリ

(5) $\dfrac{1}{2}\log D$

ヲツクリテ之レヲ $\mathfrak{y}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}$ ノ *Entfernung* ト稱シソレヲ $l(\mathfrak{y}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{II}})$ デ表ス。

ツマリ

(6) $l(\mathfrak{y}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\left\{T^{12} - K^2A^{12}\right\}^2}{\left\{T^{11} - K^2A^{11}\right\}\left\{T^{22} - K^2A^{22}\right\}}$

デアル。

サテ α, β ヲすからートシテ三ツノ球 $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w}$ ニ對シテ

(7) $\mathfrak{w} = \alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z}$

ナラバ

(8) $l(y,z)+l(z,w)+l(w,y)=0$

ガ成立ツ。

ツマリ線分ノ *additive Eigenschaft* ガ成立スルノデアル。

(II) 今 *Kreisfläche* 上ニ (τ), (t) 曲線ヲ考ヘ尚別ニ

$$(1)\quad \frac{d\tau}{dt}=\alpha$$

ナル曲線ヲ考ヘル. コノ最後ノ曲線ヲCト名ヅケル、今 (τ), (t) 曲線ノ間ノ角ヲ ω トシ φ ヲバ (τ) 曲線ト C トノナス角トセバ

$$(2)\quad \frac{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,d\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,dt}=\frac{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\alpha=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}=\frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)}}{H\cot\varphi-(\theta_t\theta_\tau)}$$

デアル、コヽニ

$$(3)\quad H=\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}$$

デアル。

ソコデ

$$(4)\quad \tan\varphi=\frac{H\alpha}{(\theta_t\theta_t)+(\theta_t\theta_\tau)\alpha}$$

ガ成リ立ツ、ソコデ φ_1, φ_2 ナル二ツノ値ヲ φ ガトリシ時ノ C ノ値ヲ C_1, C_2 トシ、ソレニ對應スル α ノ値ヲ α_1, α_2 トセバ

$$(5)\quad \varphi_1-\varphi_2=\tan^{-1}\left\{\frac{H(\alpha_1-\alpha_2)}{(\theta_t\theta_t)+(\theta_t\theta_\tau)(\alpha_1+\alpha_2)+(\theta_\tau\theta_\tau)\alpha_1\alpha_2}\right\}$$

デアル。

尚 $\alpha=-\dfrac{(\theta_t\theta_t)}{(\theta_t\theta_\tau)}$ ナル場合ニハ $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ トナリCハ次ノ様ニナル。

$$(6)\quad \frac{d\tau}{dt}=-\frac{(\theta_t\theta_t)}{(\theta_t\theta_\tau)}$$

以上拙著台北大學理農學部紀要第二巻第一号ト Ann. of Math. 23, p. 53 ニ於ケル Whittemore ノ論文トヲ比較セバヨイ。

(III) Asymptotic lines on the first sheet of the centro-surface ハ下ノ様ニナル。

$$(\theta_t\theta_t)\alpha_1\beta^2dt^2-(\theta_\tau\theta_\tau)\beta_1\alpha^2d\tau^2=0$$

但シ此ノ時原表面ハ円系表面ノ場合デアル、同様ニ Second sheet ニ對スル Asymptotic lines ノ式ハ

$$(\theta_t\theta_t)\alpha_2\beta^2dt^2-(\theta_\tau\theta_\tau)\beta_2\alpha^2d\tau^2=0$$

デアル。

尚、亦円系表面ガアツテ其ノ centro-surface ノ first sheet ノ上ノ lines of curvature ノ式ハ下ノ様デアル。

$$\begin{aligned}(\theta_t\theta_t)\beta^2\alpha_1\alpha_2\,dt^2&+(\theta_\tau\theta_\tau)\alpha^2\alpha_2\beta_1\,d\tau^2\\&+\{(\theta_t\theta_t)\beta^2\alpha_2^2+(\theta_\tau\theta_\tau)\alpha^2\alpha_1\beta_1\\&+(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)(\alpha-\beta)^2\,dt\,d\tau=0\end{aligned}$$

デアル、Second sheet ノ上ノモノモ同様ニ分ル．$\alpha,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ ニツイテハ Weatherburn: Diff. Geo. I,

p. 156, p. 154 ヲ見ラルベシ。

(IV) 円系表面上ニ測地曲線

(1) $\mu(t,\tau)=\text{const.}$

ガ與ヘラレソレニ垂直ナル方向 $(d\tau:dt)$ ニ向ッテハ

$$(2)\quad \{(\theta_t\theta_t)\mu_\tau-(\theta_t\theta_\tau)\mu_t\}dt \\ +\{(\theta_t\theta_\tau)\mu_\tau-(\theta_\tau\theta_\tau)\mu_t\}dt=0$$

ガ成立ツ、Scheffers: Theorie der Flächen (1922), S. 499 ヲ參考シタ。

(2) ニ於ケル $(d\tau:dt)$ ガ

$$(3)\quad (\theta_t\theta_t)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2+2(\theta_t\theta_\tau)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)+(\theta_\tau\theta_\tau)=0$$

ヲ滿足セバ

$$(4)\quad (\theta_t\theta_t)\left\{\frac{(\theta_t\theta_\tau)\mu_\tau-(\theta_\tau\theta_\tau)\mu_t}{(\theta_t\theta_\tau)\mu_t-(\theta_t\theta_t)\mu_\tau}\right\}^2+2(\theta_t\theta_\tau)\left\{\frac{(\theta_t\theta_\tau)\mu_\tau-(\theta_\tau\theta_\tau)\mu_t}{(\theta_t\theta_\tau)\mu_t-(\theta_t\theta_t)\mu_\tau}\right\} \\ +(\theta_\tau\theta_\tau)=0$$

デアル。(4) ハ (1) ニ orthogonalen Trajektorien ガ極小曲線ナル條件デアル。