640. 高階常微分方程式ノ境界値問題(二)

南雲　道夫（阪大）

I. 問　題

第n階常微分方程式

$$(0) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots\cdots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

ニ於テ，與ヘラレタn個ノ点 $x=\alpha_i$，$y=\beta_i$ ($1 \leqq i \leqq n$) ヲ通ル積分ノ存在ヲ論ズル方法トシテ，福原氏ハ*Lagrange*

ノ補間法ヲ利用シテ (0) ヲバ聯立一階ノ方程式ニ変換シ, 之レニ函数空間ニ於ケル不動点ノ存在定理ヲ適用スル方法ヲ考ヘラレタ。(岩波講座, 常微分方程式論 131頁)

福原氏ノ考ヘヲ進メテ, 本紙140号 (雑記 VI) ニ於テハ, Lagrange ノ補間法ヨリモ一般的ナ方法ニヨリ, 簡明ナ変換式ガ得ラレタ。 次ニハ更ラニ n 個ノ点ヲ通ル代リニ, ヨリ一般的ナ條件 (n 個ノ線状條件) ニツイテモ, 前ト同様ナ方法デ具体的ナ変換ガ得ラレルコトヲ報告シタイ。

$\Lambda_i[y]$ ヲバ $y(x)$ ニ對スル n 個ノ linear functional トシ

$$\Lambda_i[y(x)] = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \text{------}, n)$$

ナルヤウナ (0) ノ積分ヲ考察シヨウ。例ヘバ特ニ Λ_i ヲバ

$$\Lambda_i[y(x)] = y(\alpha_i)$$

ナル運算トスレバ前ノ問題トナル。之レハヨリ一般ナ形式

$$\Lambda_i[y(x)] = \sum_{l=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} c_{i,\nu}^{l}\, y^{(\nu-1)}(\alpha_l)$$

ニ含マレテヰル。次ニハ一般ニ

$$\Lambda_i[y(x)] = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Lambda_{i,\nu}[y^{(\nu)}(x)],$$

$\Lambda_{i,\nu}$ ハ連続ナ線状汎函数 [Stieltjes 積分デ表ハサレル], ヲ問題トスル。

II. 変換

先ヅ特殊ナ第n階線狀微分方程式

$$(\mathrm{L}) \qquad L[y]=\frac{d^n y}{dx^n}+\sum_{\nu=0}^{n-1} P_{n-\nu}(x)\frac{d^\nu y}{dx^\nu}=0$$

ニ於テ已ニ上ノ問題ガ(一義的ニ)完全ニ解ケテヰルモノトシ，$\varphi_j(x)$ヲバ(L)ノ積分ガ

$$\Lambda_i[\varphi_j]=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

ナルモノトスル。例ヘバ

$$L[y]=\frac{d^n y}{dx^n}$$

トスレバ，$\varphi_j(x)$ハ $n-1$次(高々)ノ有理整式トナリ，$\Lambda_i[\varphi_j]=\delta_{ij}$ ニヨツテ係数ヲ決定スレバヨイ。更ニ特ニ $\Lambda_i[y]=y(\alpha_i)$ ナル場合ニハ

$$\varphi_i(x)=\frac{\prod_{\lambda\neq i}(x-\alpha_\lambda)}{\prod_{\lambda\neq i}(\alpha_i-\alpha_\lambda)}$$

デアル。(Lagrange ノ補間法ニ相當スル)

又 $\chi(x,\alpha)$ヲバ(L)ノ積分デ

$$\chi(\alpha,\alpha)=0, \quad \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\chi(x,\alpha)_{x=\alpha}=0 \qquad (1\leqq\nu\leqq n-2),$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\chi(x,\alpha)_{x=\alpha}=1$$

ナルモノトスル．例ヘバ　$L[y]=\dfrac{d^n y}{dx^n}$ ノ時ニハ

$$\chi(x,\alpha)=\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

扨テ、以上ノ $\varphi_i(x)$ ヲ用ヒテ

$$(\mathrm{H})\quad \begin{cases} y=\sum_j \varphi_j(x)\,y_j \\ y^{(\nu)}=\sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x)\,y_j \end{cases} \qquad (\nu=1,2,\cdots\cdots,n-1)$$

ナル変換ニヨリ（$y,\ y',\cdots\cdots,\ y^{(n-1)}$）ヲバ（$y_1,\ y_2,\cdots\cdots,\ y_n$）ニ移セバ，方程式（O）ハ之レト同等ナ聯立一階方程式

$$(\mathrm{K})\quad \boxed{\frac{dy_i}{dx}=\chi_i(x)\left\{f(\ )-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{(n)}(x)\,y_j\right\}}$$

ニ移ル．但シ $\chi_i(x)$ ハ

$$\Lambda_i[\chi(x,\alpha)]=\chi_i(\alpha),$$
$$f(\ )=f\Big(x,\sum_j \varphi_j\,y_j,\ \sum_j \varphi_j'\,y_j,\cdots\cdots,\sum_j \varphi_j^{(n-1)}\,y_j\Big).$$

（H）ニヨリ（O）カラ（K）ニ移ルコトハ（H）ニヨリ（O）ハ

$$(\mathrm{J})\quad \begin{cases} \sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x)\,y_j'=0 \qquad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots,n-2) \\ \sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x)\,y_j'=f(\ )-\sum_j \varphi_j^{(n)}(x)\,y_j \end{cases}$$

ト同等ナルコトヲ証明シ、又 $\chi_j(x)$ ノ定義カラ

$$
(\mathrm{I}) \begin{cases} \sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x)\chi_j(x)=0 \quad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots,n-2) \\ \sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x)\chi_j(x)=1 \end{cases}
$$

ナル恒等式ヲ導出シ，之ヲ（J）ニ適用スレバヨイ。

III 不動点ノ定理ノ適用

（K）ナル式ニヨリ

$$
y_i = c_i + \int_{\alpha_i}^{x} \chi_i \left\{ f(\ ) - \sum_j \varphi_j^{(n)} y_j \right\} dx.
$$

ソコデ C_i ヲ決定スルタメニ，之レヲ

$$
\Lambda_i[y] = \Lambda_i[\sum_j \varphi_j y_j] = \beta_i
$$

ニ代入シテ

$$
c_i = \beta_i - \textcircled{H}_i[y]
$$

ヲ得ル（途中デ（I）ヲ利用セヨ）。但シ

$$
\textcircled{H}_i[y] = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Lambda_{i,\nu} \left[\sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x) \int_{\alpha_j}^{x} \chi_j \left\{ f(\ ) - \sum_l \varphi_l^{(n)} y_l \right\} dx \right]
$$

従ッテ $T_i[y]$ ヲバ $(y_1, \cdots\cdots, y_n)$ ニ対シテ

$$
T_i[y] = \beta_i - \textcircled{H}_i[y] + \int_{\alpha_i}^{x} \chi_i \left\{ f(\ ) - \sum_j \varphi_j^{(n)} y_j \right\} dx
$$

ナル函数運算トスレバ，之レハ過連続（vollstetig）トナリ，問題ハ函数空間ニ於ケル不動点ノ定理

$$
y_i(x) = T_i[y_1, \cdots\cdots, n]
$$

ニ帰着スル。

茲ニ注意スベキハ，只（L）ニツイテ問題ガ完全ニ解ケテヰレバ，T_i ナル運算ハ完全ニ具体的ニ與ヘラレルコトデアル。扨テ不動点ノ定理ニヨリ

“ $|y_i(x)-\beta_i|\leqq \omega_i(x)$ 〔$\omega_i(x)$ ハ $a\leqq x\leqq b$ デ連続〕
$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

ナルヤウナ $a\leqq x\leqq b$ ニ於ケルスベテノ連続函数 $y_i(x)$ ニツキ常ニ

$$|\mathrm{T}_i[y_1,\cdots\cdots,{}_n]-\beta_i|\leqq \omega_i(x) \qquad (i-1,2,\cdots\cdots,n)$$

ガ成立スルナラバ，微分方程式（0）ハ

$$\Lambda_i[y]=\beta_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル解ヲ有スル。”

以上ハアマリ一般的デ空漠トシテヰルカラ次ニ特別ナ場合ヲ述ベヨウ。

IV. 特別ナ場合

i) 先ヅ $f(\ )$ ノ大サニツイテ，之ガ $|y|,|y'|,\cdots\cdots\cdots\cdots,|y^{(n-1)}|$ ニツイテ一次ノ程度デアルトスル。即チ

$$\left|f(x,y,y',\cdots\cdots,y^{(n-1)})\right|\leqq A+\sum_{\nu=0}^{n-1}B_\nu|y^{(\nu)}|$$

又更ニ n 個ノ点ヲ通ル問題（$x=\alpha_i$ ノトキ $y=\beta_i$）ニ限ル。

ソコデ $\mathrm{L}[y]=\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ヲ用ヒル。

従ッテ

$$\varphi_i(x) = \prod_{\lambda \neq j} \frac{x-\alpha_\lambda}{\alpha_i - \alpha_\lambda}, \qquad \chi_i(x) = \frac{(\alpha_i - x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\Theta_i[y] = 0.$$

此ノ場合ニハ $\omega_i(x) = C\dfrac{|x-\alpha_i|^n}{n!}$ トオクノガ適當デアラウ、ソコデ

$$\frac{1}{n!}\max_{a\leqq x\leqq b}\left[\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_j B_\nu \left|\varphi_j^{(\nu)}(x)(x-\alpha_j)^n\right|\right] = \mathrm{L}$$

$$\max_{a\leqq x\leqq b}\left[A + \sum_\nu B_\nu \left|\sum_j \beta_j \varphi_j^{(\nu)}(x)\right|\right] = \mathrm{M}$$

トオケバ

$$\left|\mathrm{T}_i[y_1, \dots, {}_n] - \beta_i\right| \leqq (\mathrm{M} + \mathrm{L}C)\frac{|x-\alpha_i|^n}{n!}$$

ヲ得ル。 故ニ $\boxed{\mathrm{L} < 1}$ ナル時ニハ, $C = \dfrac{\mathrm{M}}{1-\mathrm{L}}$ トスレバ

$$\left|\mathrm{T}_i[\quad] - \beta_i\right| \leqq \omega_i(x)$$

トナル, 求ムル解ガ存在スル。

特ニ $n=2$ ノトキハ $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$ トスレバ

$$\mathrm{L} = \max\left[B_1\frac{b-a}{2},\ B_0\frac{(b-2)^2}{8} + B_1\frac{b-a}{4}\right] < 1$$

ガ存在ノ充分條件トナル。勿論之レハ尚モット精密ニスルコトモ出來ル筈デアル。$n \geqq 3$ ノ場合ハ一般ニ複雑トナリ、簡單ナ具体的結果ハ求メニクイ。之レハ私ガ計算ノ下手ナタメデモアルカラ ソノ方ノ得意ナ方ノ御援助ヲ仰ガネバナラナ

イ。

ii) 今度ハ

$$f(x, y, y', \cdots\cdots, y^{(n-1)})$$
$$= -\sum_{\nu=0}^{n-1} p_{n-\nu}(x)\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + h(x, y, y', \cdots\cdots, y^{(n-1)})$$

デ $h(x, y, \cdots\cdots, y^{(n-1)})$ ガ割合ニ小ナル時ニハ，

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{n-\nu}(x)\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = 0$$

ニ於ケル解 $\varphi_j(x)$ ヲ利用スルコトニヨリ，簡単ニナル。即チ

$$\frac{d^n}{dx^n}\varphi_j(x) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} p_{n-\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\varphi_j(x)$$

ニヨリ，(IX) ナル方程式ハ

$$\frac{dy_i}{dx} = \chi_i(x)\, h\Big(x, \sum_j \varphi_j y_j, \cdots\cdots, \sum \varphi_j^{(n-1)} y_j\Big)$$

トナル。故ニ T_i ハ

$$T_i[y] = \beta_i - \Theta_i[y] + \int_{\alpha_i}^{x} \chi_i\, h(\ )\, dx,$$

但シ

$$\Theta_i[y] = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Lambda_{i,\nu}\Big[\sum_j \varphi_j^{(\nu)}(x)\int_{\alpha_j}^{x} \chi_j\, h(\ )\, dx\Big].$$

ソコデ $h(\ )$ ガ割合ニ小ナルコトヲ利用スレバ，($\omega_i(x)$ ヲ適当ニ定メテ) 存在定理ガ成立スルコトガ言ヘル。