636. 領域ノ移動ニヨルDirichletノ問題ノ解ノ變化ニツイテ(續)

井上　正雄(阪大)

本誌136號603ニヲイテΩニ收斂サス領域列ヲ(142号629ニヲケル結果ヲ除イテ)全部regularニ限ツタガコノregularityヲ除去シテモ議論ニハ何等差支ヘガナイコトガワカル。ソレニハ第一ニ"有界ナ調和函數ハソノregularナ境界点ノ値ノミニヨツテ定マル"コトニ注意スレバヨイ。第二ニハ條件(C)ヲ有スルトキノ証明ニヲイテ、不等式

$$V(z;\ z_{n'}) \leqq V(-|z-z_{n'}|) \qquad (*)$$

ノ矢張リ成立スルコトヲ云ヘバヨイ。[1] 談話603デハコノ証明モ省略シタガ，茲ニコノ不等式ヲ$\Omega_{n'}$ノregularityヲ除去シテ証明スル。

---

1) 629ニヲケル談話ノ結果ニハ$\{\Omega_n\}$ノregularityノ不必要ナコトハΩ_nガ有限次連結領域ダカラ，ソノirregularナ境界点ハ孤立点以外ニナイコトヲ注意スレバヨイ。

ソノタメ使用スベキ Beurling ノ定理[2] ハ次ノ如キモノデアル。

Ω ヲ有界ナ次ノ如キ性質ヲ有スル領域トスル：

$E_{\Omega,0}$ ガ實軸上ノ有限個ノ segment L;

$$L\begin{cases}(r_\nu, r'_\nu) & \nu=1,2,\cdots\cdots n\\ 0\leqq r_1<r'_1<r_2<r'_2<\cdots\cdots<r'_n\leqq R\end{cases}$$

ニ一致スルカ或ハ之レヲ含ム。コヽニRハ Ω ヲ含ム円ノウチ最小ノ円ノ半徑デアル。$u(z)$ ヲ Ω 内デ一價調和函数トシ，Ω ノスベテノ境界点 z ニテ $\overline{\lim}\, u(z)\leqq f(|z|)$ トスル，但シ $f(r)$ ハ閉區間 $[0,R]$ ニテ定義サレタ $\log r$ ノ凸函数デアリ，$f(0+0)=f(0)<+\infty$，$f(R-0)\leqq f(R)<+\infty$．シカルトキ，円 $|z|<R$ ニ L ナル cut ヲ入レタ領域 Δ 内ニテ，コノ境界点 z ニヲイテ $f(|z|)$ ナル値ヲトル調和函数ヲ $V(z)$ トスルトキ

$$u(z)\leqq V(-|z|)$$

コノ定理ヲ不等式（※）ニ直接應用スルコトハ出來ナイ。第一 $\Omega_{n'}$ ノ irregular ナ境界点ニヲイテ $\overline{\lim}\, u(z)\leqq f(|z|)$ ナル関係ガ不明デアリ[3] 且ツ projection ガ有限個ノ segment カラナッテイルカドウカモワカラナイ。

---

2) コノ定理ハ今迄度々引用シタモノデアル。Beurling ハモウ少シ一般ナ假定ノモトニ之レヲ証明シテイル。Thèse. (Upsal, 1933) p. 52。

3) シカモ $\underline{\lim}\, u(z)\geqq f(|z|)=r$ スラ出ルノデアル。

コノニツヲ次ノ如キ手段ニヨツテ切リ抜ケルコトガ出来ル。

$$\Omega_{n'}=\Omega,\quad z_{n'}=0$$

トオイテ

$$V(z;0)\leqq V(-|z|)$$

ヲ証明スル。

先ヅ Ω ヲ次ノ如キ *regular domain* ノ系列 $\{\Omega_i\}$ デ近似スル。

1° $\Omega\supset\cdots\cdots\supset\Omega_{i+1}\supset\Omega_i\supset\cdots\cdots\supset\Omega,$

2° $\lim\limits_{i\to\infty}\Omega_i=\Omega$

3° $E_{\Omega_i,0}$ ガ有限個ノ *segment* カラナツテイル。

コノコトノ可能ナルコトハ Ω ヲ *réseau* ニ分ケテコレカラ作ラレル有限次連結ナ領域（開集合）デ近似シテユケバヨイ。Ω_i ノ境界点 z ニヲイテ $|z|$ ナル値ヲトル Ω_i デノ調和函数ヲ $V_i(z)$ トスレバ

$$\lim_{i\to\infty}V_i(z)=V(z;0)$$

デアル。

サテ次ノコトガ云ヘルコトヲ注意シヤウ。

Projection ヲ作ルベキ ζ 平面上デ δ ヲ充分小サイ正数トスルトキ，充分先ノスベテノ i ニ對シテ，$E_{\Omega_i,0}$ ガ *segment* l_δ : $0\leqq\zeta\leqq\rho(E_{\Omega,0})-\delta$ ヲ含ム。ココニ $\rho(E_{\Omega,0})$ ハ $E_{\Omega,0}$ ノ原点ヲ含ム *segment* ノ長サ

デアル。

コノコトハ $\mathfrak{D}_i$ ノ作リ方ヨリシテ明ラカデアル。
故ニ充分大キクトッタ円 E ($\supset E_{\mathfrak{D}_i,0}$ ハ充分先ノスベテノ i ニ對シ) $= E_{\mathfrak{D}_K,0} \supset l_\delta$ ナルーツノ $K(\delta)$ ヲ定メ, $E = \text{cut } l_\delta$ ノ入ッタ領域 $\Delta_{K(\delta)}$ ニ関シテ境界点 ξ ニテ $|\xi|$ ナル値ヲトル調和函数ヲ $V(\xi; \Delta_{K(\delta)})$ トスレバ Beurling ノ定理ヲ使ッテ[4)]

$$V_{K(\delta)}(z) \leqq V(-|z|; \Delta_{K(\delta)})$$

$\{\delta_i\}$ ヲ $\delta_i \downarrow 0$ ナルゴトク撰ビ各々ノ δ_i ニ對シ $K(\delta_i) < K(\delta_{i+1})$ ナル如ク上ノ方法デ $\Delta_{K(\delta_i)}$ ヲ作リ函数 $V(\xi; \Delta_{K(\delta_i)})$ ヲ作レバ

$$V_{K(\delta_i)}(z) \leqq V(-|z|; \Delta_{K(\delta_i)}) \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

シカルニ $\Delta_{K(\delta_i)} \to \Delta_{K(0)}$;
コヽニ $\Delta_{K(0)}$ ハ

$$E = \text{cut } l_0 : \ 0 \leqq \xi \leqq \rho \ (E_{\mathfrak{D},0})$$

ヲ入レタ領域, 且ツコノ領域列ハ條件 (C) ヲ満足シテイルカラ, 談話603ニヲイテ不等式 (※) ヲ導イタトキト同ジ方法ヲ $\{\Delta_{K(\delta_i)}\}$ ニ繰リ返セバ, $V(z; z_n)$, $V(\xi)$ ニ對應スル函数ヲ夫々 $v(\xi; \xi_i)$, $v(\zeta)$ トスルトキ不等式

$$v(\xi; \xi_i) \leqq v(-|\xi|)$$

ハ Beurling ノ定理ヲソノマヽ使ッテ云ヘル。

---

4) 半径ヲ充分大キク取ッテハアルガ $|\xi|$ ガ劣調和函数ナルコトニ注意スレバコノ不等式ノ成立スルコトガワカル。

ヨッテ

$$\lim_{i\to\infty} V_{K(\delta_i)}(z) = V(z;0)$$

$$\leqq \lim_{i\to\infty} V(-|z|;\Delta_{K(\delta_i)}) = V(-|z|;\Delta_{K(0)})$$

シカルニ E ニ條件(C)ニヨケル共通線分 $l(\leqq l_0)$ ナル cut ヲ入レタ領域ニ對シテ作ッタ函數ヲ $V(\xi)$ トシタノデアルカラ

$$V(-|z|;\Delta_{K(0)}) \leqq V(-|z|)$$

故ニ，結局

$$V(z;0) \leqq V(-|z|)$$

（證明了）

コレデ不等式(*)ガ必ズシモ regular デナイ領域ニ對シテモ成立スルコト即チ談話 603 ニオイテ $\{\Omega_n\}$ ヲ regular domain ノ系列ニ限ル必要ノナイコトガワカッタ。

猶，コノ事實ヲ使ッテ境界点ガ regular ナルタメノ充分條件ヲ與ヘルコトガ出來ル。コノコトヲ次号ニテ改メテ述ベヤウ。