630. *Omoituita mama*, IX

福原　満洲雄（九大）

1. n階微分方程式ニツイテ，$x=\alpha_i$ デ $y=\beta_i$ トナル解ノ存在ヲ一般的ニ研究スルノニ，コレヲ聯立微分方程式ニ関スル問題ニ直ストイフ方法ニ期待ヲ持ッテ居ナカッタノデハナイ。何ノ期待モ持タヌモノナラバ岩波講座ニ書キハシナカッタデアラウ。全然捨テ去ッテ了フニハ未練ガアッタ。

併シ岩波講座ニ書イタアノ変換ニハ期待ガ持テナカッタガ、當時ソレ以上突込ンデ考ヘル余裕ガナカッタノデアル。ソレガ南雲氏ニ拾ヒ上ゲラレタコトハ實ニ仕合セナコトデアル。而モ今回ノ結果（140号，雑記VI）ハソノ簡明ナル点，一般性ノアル点ニ興味ヲ感ゼシメル、ソノ應用上ノ効果ヲ期待シタイモノデアル。

2. 函数空間ニ於ケル不動点ノ存在定理ニ関シテハ，自分ノ知レル限リ（専門家ノ立場カラ見タラドウイフコトニナ

ルカ知ラナイガ）コレヲ利用スル自分ノ立場カラ見レバ Leray-Schauder ノ結果（Ann. Ec. norm., 1934）ト Tychonoff ノ結果（Math. Ann., 1935）ガ二ツノ頂点ヲナシテ居ル．シカシコノ二ツダケデハ未ダ十分デナイ。コレ等ヲ含ムモット廣イ定理ガ得ラレタラ、ドンナニカ便利デアラウ。Tychonoff ノ如ク廣イ空間ニヲイテ Leray-Schauder ノ如キ形ノ定理ガ欲シイモノデアル。

3. Leray-Schauder ハ Banach ノ空間ニ於イテ $\overline{\omega}$（ω ハ開集合）デ過連続（vollstetig）ナ変換 $f(x)$ ニ対シテ $\Phi(x) \equiv x - f(x)$ ト置キ，次ノ三ツノ性質ヲ持ツ数 $d(\Phi, \omega, a)$ ノ存在ヲ証明シテヰル．コレヲ degré topologique de la transformation Φ au point a ト呼ンデイル。

1° $\omega = \omega_1 + \omega_2$，$\omega_1 \omega_2 = 0$ ナラバ

$$d(\Phi, \omega, a) = d(\Phi, \omega_1, a) + d(\Phi, \omega_2, a)$$

但シ ω_1', ω_2' ヲ ω_1, ω_2 ノ縁トシタトキ a ハ $\Phi(\omega_1')$, $\Phi(\omega_2')$ ノ上ニハナイモノトスル。

2° $d(\Phi, \omega, a) \neq 0$ ナラバ $a \in \Phi(\omega)$.

3° a ガ $\Phi(\omega')$（ω' ハ ω ノ縁）ノ上ニ來ナイヤウニ a, f, ω ガ連続的ニ変ルトキ $d(\Phi, \omega, a)$ ノ値ハ変化シナイ。

尚. Leray-Schauder ノ定義ニヨレバ $d(\Phi, \omega, a)$ ハ常ニ整数値ヲ取リ、$a \in \omega$ ナルトキ $d(x, \omega, a) = 1$

トナル。

$a\in\omega$ ナラバ 3° ニヨリ $d(x-\lambda a,\omega,(1-\lambda)a)$ ハ変化シナイカラ $d(x-a,\omega,0)=1$ デアル. ω ガ凸集合デ、$a\in\omega$ 且ツ $f(\omega)\subseteq\omega$ デ, ω ノ縁 ω' デハ $x\neq f(x)$ ナラバ $\Phi_\lambda(x)\equiv x-\{a+\lambda[f(x)-a]\}$ ト置キ 3° ヲ使フコトニヨリ $0\leqq\lambda\leqq1$ ニ於テ $d(\Phi_\lambda,\omega,0)=1$ ヲ得ル。$\lambda=1$ トスレバ $d(\Phi,\omega,0)=1$. 2° ニヨリ $x-f(x)=0$ ナル x ガ ω ノ中ニ存在スル. コノヤウニシテ $\omega\leqq f(\omega)$ ナル場合ノ不動点ノ存在定理ヲ得ルガ, $d(\Phi,\omega,0)\neq0$ ナラバ 2° ニヨリ不動点ガ存在スルノデ $\omega\leqq f(\omega)$ デナイ場合ニモ利用サレル点ガ頗ル便利デアル。

4. コレニ反シテ Tychonoff ハ Hausdorff ノ一次空間ガ更ニ局部的凸(即チ勝手ナ 0 ノ近傍 $\nabla(0)$ ニ對シテ $\nabla(0)$ ニ含マレル 0 ノ凸近傍ガ存在スル)ノ場合ニ次ノ定理ヲ証明シタ。

bicompact ナ凸集合ヲ其自身又ハソノ部分集合ニ移ス連続変換ニハ不動点ガ存在スル。

コレデハ形ノ上デ Leray-Schauder ノ結果ヨリズット狭イ。ソレデアルカラ應用トシテハ Banach ノ空間デハ都合ノワルイ例ヲ挙ゲナクテハ面白クナイ。併シ彼ガ挙ゲタ例ガ感心出來ヌコトハ南雲氏ト同感デアル。自分ニハ如何ニモ應用センガタメノ應用トシカ思ヘナイノデアル。

併シ Tychonoff ノ定理ノ方ガ Leray-Schauder ノヨリ使イ易イ例ハ極ク手近ニアル。

5. 例ヘバ

$$(1)\quad Y_j(x)=\int_{\alpha_j}^{x} f_j\left(x, y_1(x), \cdots\cdots, y_n(x)\right) dx$$

$$(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナル変換ヲ考ヘル. $f_j(x, y_1, \cdots\cdots, y_n)$ ハ

$$(2)\quad a<x<b,\ |y_1| \leqq \omega_1(x), \cdots\cdots, |y_n| \leqq \omega_n(x)$$

デ連続デ, α_j ノ中ノ或ル者ハ a 又ハ b ニ一致シ得ルモノトスル。又 $y_i(x)$ ガ $a<x<b$ デ $|y_i(x)| \leqq \omega_i(x)$ ヲ満足スルトキ $|Y_j(x)| \leqq \omega_j(x)$ ヲ満足スルモノトスル。

$a<x<b$ デ連続ナ n 個ノ函数ノ組カラ成ル空間ニ於イテ $y^p=\{y_1^p(x), \cdots\cdots, y_n^p(x)\}$ ガ $p \to \infty$ ノトキ $y=\{y_1(x), \cdots\cdots, y_n(x)\}$ ニ収斂スルトイフコトヲ $a<x<b$ ニ含マレル勝手ナ閉區間デ $y_i^p(x)$ ガ $p \to \infty$ ノトキ一様ニ $y_i(x)$ ニ収斂スルト解釈スル、コノ空間ニ於テハ変換 (1) ハ連続デアルガ, ソレハ Banach ノ空間デハナイ. (2) ニ於テ

$$|f_j(x, y_1, \cdots\cdots, y_n)| \leqq F_j(x)$$

トナルヤウナ $F_j(x)$ ヲ取リ、$a<x<b$ デ連続デ $|y_i(x)| \leqq \omega_i(x)$, $|y_i'(x)| \leqq F_i(x)$ ヲ満足スル函数ノ組カラナル集合ニ於テ (1) ガ定義サレテヰルモノトシテ Tychonoff ノ定理ヲ使ヘバ

$$y_j(x)=\int_{\alpha_j}^{x} f_j(x, y_1(x), \cdots\cdots, y_n(x))\,dx$$

ノ解ノ存在ガ分ル。

6. *Banach* ノ空間ニ於ケル定理デスマサウト思ヘバ次ノヤウニスル。$a<\alpha_j<b$ ナラバ $\alpha_j'=\alpha_j$, $\alpha_j=a$ ナラバ $\alpha_j'=a+\varepsilon$, $\alpha_j=b$ ナラバ $\alpha_j'=b-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) ト置キ, (1) ノ代リニ

$$Y_j(x)=\int_{\alpha_j'}^{x} f_j(x, y_1(x), \cdots\cdots, y_n(x))\,dx$$

ナル変換ヲ考ヘル. 空間トシテハ $a+\varepsilon\leqq x<b-\varepsilon$ デ連続ナ n 個ノ函数ノ組ヲ取リ, 例ヘバ

$$\|y\|=\max_{a\leqq x\leqq b}\left\{|y_1(x)|, \cdots\cdots, |y_n(x)|\right\}$$

ト取ル. ソコデ不動点ノ存在定理ヲ使ヒ, 然ル後 $\varepsilon\to 0$ トスル。

或ハ拙著 *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires* (北大紀要, 1934) デ述ベタヤウニシテモヨイ。

複素領域デ同様ノ問題ヲ論ズルトキ, コンナ細工ハ使ヘナイトハ言ハナイガ考ヘ難クナルコトハ事実デアル. コレニ反シテ *Tychonoff* ノ定理デ仮定シタ compact 性ハ正規族ノ理論ニヨッテ何ノ障碍ニモナラナイ。

併シ微分方程式ノ場合ニハ解ノ或ル(勝手ナ)曲線ノ上ニ於ケル行動ヲ調ベルノニ、ソノ曲線ノ上ノ点ヲ実ノ

parameter ノ函數トシテ表ハスコトニヨリ實領域ニ於ケル問題トシテ扱フコトが出來ルカラ Tychonoff ノ定理がナクテモ大シタ不自由ヲ感ジナイが，其他ノ函數方程式トナルト，カウイフ細工ハ到底出來ヌ。若シ Tychonoff ノ定理ト Leray-Schauder ノ結果ヲ含ムヤウナ定理が得ラレタナラ微分方程式以外ノ函數方程式ノ研究ニ大イニ役立ツデアラウ。