# 626. topological group ノ微分可能性ニ就テ

吉田　耕作（阪大）

I. 距離付ケラレタ環 R ニ横ハル群 $\mathfrak{g}$ ガ Lie 群ナル爲ニ必要且充分ナ條件ハ

α) $\mathfrak{g}$ ガ komplete デアリ

β) $\mathfrak{g}$ ガ 微分可能且ツ

γ) $\mathfrak{g}$ ノ Lie-ring ガ有限次元

ニヨツテ與ヘラレ且ツ之レ等ノ三條件ハ $\mathfrak{g}$ ノ local compactnessトequivalentナコトヲ先ニ得タ。（談話 280, 291, 298, 337）。

コヽニ$\mathfrak{G}$ガ<u>komplete</u>ト云フノハ$\mathfrak{G}$ノfundamentalfolge $\{T_i\}$, $\lim T_i T_j^{-1} = E$, ガ$\lim T_i^{-1} T = E$ナル如キ$\mathfrak{G}$ノelement Tヲ定メルコト。

$\mathfrak{G}$ガ<u>微分可能</u>ト云フノハ$T_i \neq E$, $\lim T_i = E$ナルゴトキ$\mathfrak{G}$ノFolge $\{T_i\}$ニ對シ，適當ニ実數列$\{\varepsilon_{i'}\}$, $\varepsilon_{i'} \neq 0$, ト$\{T_i\}$ノ適當ナ部分列$\{T_{i'}\}$ヲ撰ベバ

$$\lim_{i' \to \infty} \frac{T_{i'} - E}{\varepsilon_{i'}} = U \, (\neq 0) \in R$$

ナルコトデアル。上ノ如クシテ得ラレル<u>微分係數</u>$U$ノ全体ニ，$R$ノ$0$ヲ付ケ加ヘタモノヲ$\mathfrak{T}$トスレバ$\mathfrak{T}$ハ

$X, Y \in \mathfrak{T}$ナラバ

$$[X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{T}$$

ナル如キreal linear spaceデアル。コノ$\mathfrak{T}$ヲ$\mathfrak{G}$ノ<u>Lie ring</u>ト呼ブ。

<u>ココニハ β) カラ γ) ノ出ルコトヲ示シタイ。</u>即チβ)ハ既ニ$\mathfrak{G}$ニ對スル"compactness"ノ要求ニナッテヰルノデアル。

証明．$\lim (T_{i'} - E)/\varepsilon_{i'} = U$カラ$\lim |T_{i'} - E| / |\varepsilon_{i'}| = |U| \neq 0, \infty$ヲ得ルカラ$\lim (T_{i'} - E)/|T_{i'} - E| = U/|U|$。即チ$\mathfrak{G}$ガ微分可能ト云フコトハ$T_i \neq E$, $\lim T_i = E$ナル如キ$\mathfrak{G}$ノFolge

$\{T_i\}$ ニ對シ $\mathcal{R}$ ノ Folge $\{\pm(T_i-E)/|T_i-E|\}$ ガ compact ト云フコトデアル。

今 $\mathfrak{G}$ ガ微分可能トシ且ツ $\mathfrak{G}$ ノ Lie-ring $\mathfrak{T}$ ガ有限ナ Base ヲモタナイトスル。然ラバ $\mathfrak{T}$ ハ real linear space ダカラ，induction ニヨリ，

$$|\mathfrak{U}_i|=1,\quad |\mathfrak{U}_i-\mathfrak{U}_j|\geqq\frac{1}{2}\quad \text{for}\quad i\neq j$$

ナルゴトキ $\mathfrak{T}$ ノ無限部分列 $\{\mathfrak{U}_i\}$ ガ存在シナケレバナラナイ。

微分係数ノ定義ト $|\mathfrak{U}_i|=1$ ニヨリ

$$\left|\frac{T_i-E}{\pm|T_i-E|}-\mathfrak{U}_i\right|\leqq\frac{1}{i}\quad \left(\text{符号}\pm\text{ハ}\ i\ \text{ニ depend シテドチラカトル}\right)$$

ナル如キ $\mathfrak{G}$ ノ Folge $\{T_i\}$，$T_i\neq E$, $\lim T_i=E$ ガ存在スル筈デアル。

然シ $|\mathfrak{U}_i-\mathfrak{U}_j|\geqq\frac{1}{2}$ for $i\neq j$ ニヨリ $\mathcal{R}$ ノ Folge $\{(T_i-E)/|T_i-E|\}$ ハ compact デナイ。之ハ $\mathfrak{G}$ ノ微分可能性ニ反スル。 ――以上――

II. 上ノ結果ハ $n$ー次元 euclid 空間 $\mathcal{E}$ ニ於ケル解析変換 $M\rightarrow M'$ ノ topological group-germ ニモ應用デキル。

即チ $\mathfrak{D}$ ヲ $\mathcal{E}$ ノ領域トスルトキ変換

$$M\rightarrow M',\quad M'=\varphi(M)\quad (M\in\mathfrak{D},\ M'\in\mathcal{E})$$

ハ点 $M'$ ノ坐標 $\varphi^1(M)$, -------, $\varphi^n(M)$ ガ点 $M$ ノ坐標 $M^1$, -------, $M^n$ ノ解析函数ナルトキニ解析変換ト呼バレル。

$\mathfrak{D}$デ定義サレタ二ツノ解析変換T, Sノ距離ヲ

$$d(\mathfrak{D}_1, T, S) = \max_{M \in \mathfrak{D}_1} |T(M) - S(M)|$$

ニヨッテ定義スル。コヽニ$\mathfrak{D}_1$ハ$\mathfrak{D}$ノ内部ニ横ハル *fixed closed domain* トシ，一般ニ$|T(M) - S(M)|$ハ$T(M) - S(M)$ノ坐標ノ max ヲ表ハス。

偖テ$\mathfrak{G}$ガ$\mathfrak{D}$デ定義サレタ解析変換ノ集合デ距離$d(\mathfrak{D}_1, T, S)$ニヨッテ *topological group-germ* デアルトスル。

$\mathfrak{G}$ノ微分可能性ヲ次ノゴトク定メル。$T_i$ヲ$d(\mathfrak{D}_1, T_i, E) \neq 0$, $\lim d(\mathfrak{D}_1, T_i, E) = 0$ナル如キ$\mathfrak{G}$ノ *Folge* トスレバ，適當ナ *Teilfolge* $\{T_{i'}\}$及ビ實數列$\{\varepsilon_{i'}\}$, $\varepsilon_{i'} \neq 0$ヲトレバ$\mathfrak{D}_1$ノ内部デ一様ニ

$$\lim \frac{T_{i'}(M) - M}{\varepsilon_{i'}} = \psi(M) \neq 0$$

ガ成立スル（*Montel* 式收斂）。コヽニ收斂ト云フノハ各坐標ノ收斂スルコト，又$\psi(M) \neq 0$ト云フノハ$\psi(M)$ノドレカ一ツノ坐標$\neq 0$ナルコトデアル。

上ノ如クシテ得ラレル$\psi(M)$（$\mathfrak{D}_1$ノ内部デ定義サレタ解析函数 n コノ *system*）ヲ$\mathfrak{G}$ノ微分係数ト名ヅケル。$\mathfrak{G}$ノ微分係数全体ニ$\psi(M) \equiv 0$ヲ付ケ加ヘタモノヲ$\mathfrak{G}$ノ *Lie-ring* ト呼ブ。

偖テ H. Cartan ニヨレバ (Actuarites Sc. et industrielles 198) $\mathfrak{G}$ ガ locally euclidian of finite dimension デ且ツ微分可能 (Cartan ハ $\mathfrak{G}$ ガ propriété [P] ヲ滿足スルト云ツテヰル) ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ Lie ノ group-germ デアル。

所ガ Cartan ノ証明ヲ讀ンデミルト l. e. of finite d. ト云フ條件ハ

α) $\mathfrak{G}$ ガ komplete

β) $\mathfrak{G}$ ノ Lie-ring $\mathfrak{T}$ ガ有限次元

ト云フコトニシカ使ッテヰナイ。

コヽニ $\mathfrak{G}$ ガ komplete ト云フノハ $d(\mathfrak{O}_1, T_i, T_j) = 0$ ナルゴトキ $\mathfrak{G}$ ノ Folge $\{T_i\}$ ハ $d(\mathfrak{O}_1, T_i, T) = 0$ ナルゴトキ $\mathfrak{G}$ ノ変換 T ヲ定メルコトデアル。

又 Cartan ニヨレバ (p.34) $\mathfrak{G}$ ガ komplete ナラバ $\mathfrak{T}$ ハ real linear space デアル。故ニ I ト全ク同様ニシテ α) 及ビ $\mathfrak{G}$ ノ微分可能性カラ β) ガ出ル。

即チ $\mathfrak{G}$ ガ Lie group-germ ナタメノ必充條件ハ kompleteness ト微分可能性ニヨツテ與ヘラレル。

何レニシテモ 次元假定 ヲ表面ニ現ハサズニスム譯デス。